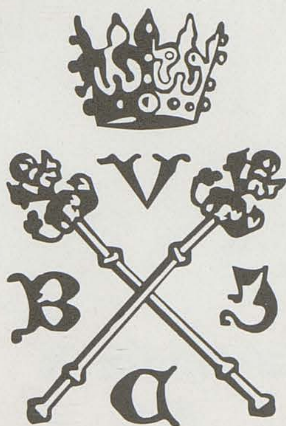




RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO

TEORYA

Przystósowaná do linii krzywych

Przez

Iána SNIADECKIEGO w Szkole Główney Koronney Matematyki wyższey i Astronomii Professora, teyże Szkoły Sekretarza.

TOM I.

Zawieraiący ALGEBRĘ *na dwie części podzieloną.*

Cena dwóch Tomów - - Zł. 12.

Znayduią się do przedaniá { w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney Koronney. w Warszawie u II. XX. Piarów.

Observatorii Astronomici Universitatis Cracoviensis



Donum Authoris

W KRAKOWIE

w Drukarni Szkoły Główney Koronney. Roku 1783.

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO TEORYA
PRZYSTOSOWANA DO GEOMETRYI LINII KRZYWYCH

Przez

J. P. SNIADECKIEGO

w Szkole Główney Koronney Matematyki wyższey i Astronomii Professora, teyże Szkoły Sekretarza.

TOM PIERWSZY.

ZAWIERAIĄCY ALGEBRĘ NA DWIE CZĘSCI PODZIELONĄ.



w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney 1783.



II

CZĘSC PIERWSZA

WYKŁADA SIĘ NATURA i WŁASNOSCI FUNKCYI ORAZ ZROWNAN ALGEBRAICZNYCH, DZIAŁANIA W ODMIANACH FUNKCYI, i SPOSOBY w ROZWIĘZYWANIU ZROWNAN ZACHODZĄCE.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Pierwſze myślenia początki (*a*) ſtósowané do poznawania natury ilości, prowadzą rozum do odkrycia tych wſzyſtkich prawideł, które w działaniach FUNKCYI iakichkolwiek i w ſposobach rozwiązania ZRÓWNAN PIERWSZEGO STOPNIA, zachodzą.

§. I.

Pierwſzé początki myślenia którémi ludzie przychodzą do wynalazków.

Ktokolwiek przeſtáwſzy choć na moment bydź Uczniém ludzi, ſtał ſię uczniém doświadczenia, ieżeli był kiedy ſzczęśliwym choć náypotocznieyſzą práwdę ſám przez ſię wprzód odkryć, niżeli ią od kogo ſłyſzał, wróciwſzy ſię uwagą na drogę ſwego wynalazku doſtrzegł zapewne, że iego práwdę poprzedzić muſiała w umyśle iaſná przytomność rzeczy iemu przedtém dobrze znanych, do których potém przypádek iaki lub reflexyá zbliżywſzy obrazy inné albo obłąkané w iego pamięci, albo przywiązané do innych iakich myśli, dały mu ié zrównać z wiadomémi i przytomnémi na ten czás: w tém porównaniu pokázał mu ſię nowy związek miedzy iego myślami, z którego powſtała prawda świeżo przez niego odkrytá. Przyſzedł więc od rzeczy znanych do nieznanych przez porównanie obrazów iakim przypádkiém lub reflexyą do ſiebie zbliżonych. Wſzyſtkié wynalázki począwſzy od náygrubſzych ſztuk i rękodzieł aż do náywyższych umieiętności ten ſám miały początek. Umyſł naſz przywiązany do zmyſłów, nie miał w pierwiáſtkach ſwego poznawania iak tylko ſkład obrazów ſzczególnych, których przez czucie

(*a*) Rozumiém przez to słowo POCZĄTEK práwdę pewną i oczywiſtą będącą gruntém wielu innych práwd: i w tém znaczeniu używać będę tego słowa w całém tém dziele.

nabył: te obrazy szczególné ścieśniały niezmiernie póty iego widok, póki przypádek lub reflexyá nie odkryły mu związku między pewnémi myślami. Ten związek rosszerzył iego poymowanie dlá tego, że ie uczynił powszechnieyszém. Odebráwszy niezliczoną liczbę porusszeń wycilkaiących w iego pamięci tyle obrazów rzeczy, przebiegłszy z niemi niezmierzoną krainę błędu i prawdy, zrównáwszy szczęśliwie wielé w sobie myśli, odkrył więcéy ogólnieyszych związków, które mu łatwo dały uczuć większą doskonałość iego działań, bo mu wyiawiły pewné prawidła ogarniaiącé wielé przypádków przedtém w pamięci iego samotnych i nieużytych. Te prawidła prowadziły go do innych; między którémi znowu pokázał się łańcuch wiążący pasmo práwd ogólnych, z których umieiętności powstały: doskonaliły się potém tém bardziéy i rosszerzały granice rozumowi, im do dalszéy ogólności wyniesionémi zostały, z których dopiéro wynikło użycie dla towarzystwa iako skutek znowu dostrzeżonégo związku między práwdą i pożytkiem. Ten iest prawdziwy postępek ludzkiego rozumu stwárzaiącégo tylé Nauk, które będą zawsze świadkami iego dzielności, a zaszczytém i roskoszą towarzystwa. Takowych my dróg statecznie się trzymaiąc, postawiémy się w stanie piérwszych Nauki naszéy wynalázców, i odkrywać sami przez się będziémy te wszystkié práwdy którė ona zamyká. Wyćwiczeni dobrze w Arytmetycznych początkach i działaniach weźmy sobie do rozwiązaniá takowé Pytanie:

Trzech Kupców wszedłszy w towarzystwo handlu złożyli pewną summę kapitału. Pierwszy z nich dał n.p. 20.000. drugi 18.000. á trzeci 12.000. złotych Polskich. Zyskali w pewnym przeciągu czasu 90.000 złot: wieleż zysku każdému z nich przypádá?

Każdy za pomocą Arytmetyki tak sobie to pytanie rozwiąże. Ponieważ zysk przypádaiący na każdégo Kupca bydź powinien proporcyonalny iego summie zakładowéy, będzie się miał do téyże summy, iako się

má

má mafsa cała zyfku do całéy maffy kapitału. Za pomocą takowéy proporcyi znaydziémy, że na pierwfzégo przypadá zyfku 36.000, na drugiégo 32.400, na trzeciego 21.600 złot: Pol: Te oftatnié wypadki działań Arytmetycznych zacieraią nám wfzyftkié ślady kombinacyi, przez ktoreśmy do nich przyfzli, dla tego, że fą wyrażoné przez znaki fzczególné, iakiémi fą liczby. *Liczba* bowiem będąc wyrażeniém związku między pewną wielkością, i iednością wziętą za miarę, nie tylko fię odmieniá z odmianą związku, á przeto gubi ślad nafzégo rozumowaniá, ale nawet rodzić fię każdá może z niefkończonych odmián i fpofobów ftófowaniá wielkości. Skąd pochodzi, że fpuściwfzy z myśli té rozumowaniá któré nás do wypadków oftatnich przywiodły, gubiémy razém wiadomość odmián iftotnie przywiązanych do nafzégo pytaniá. Chcąc ié więc tak rozwiązać, żeby oftatni wypádek rachunku ftawiáł przed oczy wfzyftkié kombinacye, przez któré do niego przechodzić należy, potrzeba na to znaków ogólniéyfzych nad liczby.

Uwági pokazuiące konieczną potrzebę wprowadzeniá w rachunek znaków ogólniéyfzych nad liczby.

Gdybyśmy wprowadzili warunki iakié n.p. że oftatni z tych Kupców uchybiwfzy należytéy trofkliwości w pewnym zabiegu, podług umowy powinien utracić dwudziefta część zyfku na niego fpadaiącégo: powtóre, że fummy zakładowé były oddané w różnych czafach, tak że pierwfzégo n.p. zakład trwáł dziewięć Miefięcy, drugiégo rok, á trzeciégo Miefięcy 15: te kondycye zawikłą znacznie pytanie pierwfzé, którégo rozwiązanie potrzebować będzie daleko głębfzych i trudniéyfzych kombinacyi. I tak chcąc nową iaką kondycyą przydadź lub dawną którą znifzczyć, przymufzeni iefteśmy za każdym razém zaczynać nafzé dociekaniá. Ta nieprzyzwoitość fkutkiém ieft także znaków fzczególnych, któré odmieniaiąc fię zawfze, nie dadzą nám rozeznać w oftatnim wypádku tego, co wciągnął ten lub ów warunek, a przeto co za znifzczeniém go powinno wypaśdź. Chcąc więc

doyśdź do takowego rozwiązania, któreby ogarnąwszy wszystkie okoliczności w pytaniu, mogło za umorzeniem iakiego warunku odkryć nam natychmiast odpowiedź przyzwoitą, i oszczędzić pracy rospoczynania naszych kombinacyi; potrzeba nam także wprowadzić w działania znaki ogólnieysze nad te których Arytmetyka używa. Dwie te nieprzyzwoitości przywiązane do liczb, któreśmy dopiero spostrzegli, pokazały się zapewne pierwszym Nauki naszey wynalazcom i wciągły ich równie iako nas w potrzebę użycia znaków ogólnieyszych do wyrażenia myśli i rozwiązania iakiegokolwiek zadania. Takiemi znakami ogólnieyszemi są litery Alfabetu łacińskie a, b, c, d, e, i t. d. albo greckie α, β, γ, δ, ε, i t. d. znaczyć mogące iakąkolwiek wielkość, n. p. przez a, możemy naznaczyć zakład pierwszego Kupca, przez b zakład drugiego, zakład trzeciego przez c, massę całą zysku wyrażać może e. Oprócz tego czasy przez które trwały zakłady trzech Kupców naznaczyć możemy przez litery t, t', t''. Ze zaś w każdem pytaniu dwoiakiego są rodzaiu ilości, znane i nieznane; iako pierwsze znaczyliśmy przez początkowe litery Alfabetu, tak ostatnie zgodzemy się wyrażać przez litery ostatnie x, y, z, i t.d. W naszem pytaniu ilością niewiadomą, którey szukamy iest część zysku spadaiąca na pierwszego Kupca, nazwiemy ią więc x. Niżeli przystąpiemy do nazywania innych rzeczy niewiadomych, rostrząsnąć nam wprzód należy, czyli te niezawisły od pierwszey nieznaney rzeczy x, tak że za odkryciem tey, pokażą nam się wartości tamtych. Iakoż w naszem zadaniu łatwo się przekonać, że maiąc część zysku przypadaiącą na pierwszego Kupca, będzie nam łatwo odkryć części należące się dwom ostatnim, które są proporcyonalne summom zakładowym i czasom. Przez tę uwagę tyle korzystamy, że rzeczy nieznane w pytaniu przywodzemy do iak naymnieyszey liczby, i ułatwiamy niezmiernie nasze dociekania.

Przestroga w znaczeniu ilości.

ciekania. Bez tey przestrogi gdybyśmy n. p. byli przez y, z, naznaczyli porcye dwóch ostatnich Kupców, zawikłalibyśmy byli przez tę niezręczność nasze badania, wciągnąwszy bez potrzeby trzy nieznane ilości x, y, z, a przez to z iednego pytania, zrobilibyśmy ich były trzy. Ta nieprzyzwoitość da nam się uczuć niżey.

§. II.

Sposoby zostawione rozumowi ludzkiemu dochodzenia rzeczy nieznanych.

Odkrywszy ogólne znaki na cechowanie ilości, zatrzymaymy się uwagą nad pytaniem podanem. Mamy w niem rzeczy znane i nieznane; potrzeba nam więc z pierwszych przyiśdź do ostatnich. Ale iakąż drogą? oto tą samą, którą idziemy we wszystkich myślach i poznawaniach naszych iakichkolwiek, to iest: przez związki które zachodzą między rzeczami znanemi i nieznanemi; te bowiem związki raz dostrzeżone uczą nas, że rzeczy nieznane nic innego nie są tylko rzeczy znane zawarte w pytaniu, pewnym sposobem do siebie zbliżone i ułożone. Dostrzegłszy więc związku, cała sztuka wynalazku zależy na tem zbliżeniu rzeczy znanych do siebie. Upatruymy nasamprzód tego związku w naszem pytaniu równaiąc wszystkie w niem zawarte okoliczności. Zebrawszy razem wszystkie kondycye, Pytanie nasze tak się ogólniey wykłada:

„Trzech Kupców złożyli pewny kapitał w czasie „różnym. Pierwszy dał summę a na czas t, drugi „summę b na czas t', trzeci summę c na czas t''. „Ten ostatni uczynił niedbalstwem pewny zawód, „dla którego tracić musi podług kontraktu *20stą* część „przypadaiącego zysku. Zyskali summę e, cóż się każdemu należy za porcyą odpowiadaiącą zakładowi, „przeciągowi czasu i warunkom w umowie zawartym„?

Pierwszy związek wypadaiący z porównania wszystkich kondycyi pokazuie się ten: że wszystkie trzy rozdziały zysku, dodane sobie, wyczerpać powinny całą massę zysku e; a zatem summa trzech zysków iest równa massie e. Pamiętaiąc o tym związku dostrzeżo-

 nym

nym w pytaniu, pracuymy teráz nad wyrażeniém go przez znaki ogólné. Potrzeba nám nasámprzód wyrazić porcyą każdégo z osobna Kupca, dodadź ie razém, i zrównać potém z e. Aże dwóch ostatnich porcye zawisły od porcyi piérwszégo nazwanéy x, trzeba nám ie więc także wyrazić przez x stósowané z zákładém i czasém każdégo. Do tego wynalázku doydziémy przez proporcyą, w któréy maiąc trzy terminy, wynáyduiémy w Arytmetyce czwarty, mnożąc drugi przez trzeci i dzieląc tę mnogość przez piérwszy. Ale działaiąc przez litery iakże ten czwárty termin wyrażemy? Oto przez inné znaki, którémi cechować będziémy zachodzącé działaniá: i tak mnożenie liter znaczyć będziémy przez kropkę (.) lub krzyż leżący (×) położony między literami wchodzącémi do mnożeniá n. p. $x.b$, albo $x \times b$ znaczyć będzie x rozmnożoné przez b. Nawet litery przy sobie tuż położoné bez żadnégo znaku wyrážać będą mnożenie iednéy przez drugą, iako to xb. Dzielenie zaś ilości wyrážać będziémy albo dwiema kropkami (:) położonémi między ilością podzielną i dzielącą, albo przez ułomek, którégo licznik znaczyć będzie ilość podzielną, mianownik zaś ilość dzielącą, n. p. $xb{:}a$ albo $\frac{xb}{a}$ znaczy mnogość xb rozdzieloną przez a.

Znaki Mnożeniá, Dzieleniá.

Maiąc iuż znaki na cechowanie dziáłań, á chcąc doyśdź podziáłów przypádaiących na każdégo w szczególności Kupca, stósóymy nasámprzód samé summy nie maiąc żadnégo względu na czasy. Ieżeli podział pierwszégo iest x odpowiadaiący zákładowi a; podział drugiégo odpowiadaiący summie b wypádá s takowéy proporcyi.

Na drugiégo - $a : x :: b : \frac{xb}{a}$

Na trzeciégo - $a : x :: c : \frac{xc}{a}$

Trzy więc porcye zysku x, $\frac{xb}{a}$, $\frac{xc}{a}$, dopiéro wynalezio-

zioné náleżą do tegóż ſamégo czaſu, który biorę za miarę porównywaniá czyli za iedność; iakież wypadną zyſki na czaſy różné naznaczoné przez t, t', t''? Ponieważ zyſki odpowiadaiącé pewnym zákładom, tak ſię maią iak czaſy, pytanie naſzé rozwiążą naſtępuiącé proporcye:

Na pierwſzégo Kupca - $1 : x . : t : xt.$

Na drugiégo - - - $1 : \frac{xb}{a} : : t' : \frac{xbt'}{a}$

Na trzeciégo - - - $1 : \frac{xc}{a} : : t'' : \frac{xct''}{a}$

Oſtatnié terminy tych proporcyi $xt, \frac{xbt'}{a}, \frac{xct''}{a}$ wyrážaią trzy porcye zyſku náleżyté każdégo ſummie i czaſowi, przez który trwáł zákład. Nie zoſtaie nám tylko wyrazić przez znaki ten związek w pytaniu doſtrzeżony, ktoryśmy na początku tego § wyłożyli w ſłowach. Potrzeba nám więc znaku, któryby wyraził dodanie trzech podziałów $xt, \frac{xbt'}{a}, \frac{xct''}{a}$ takowym znakiém, będzie krzyż proſty ſtoiący (+) położony między terminami, któré chcémy dodáwać. Wymáwiá ſię ten znak u łacinników *plùs* (*więcéy*,) my go zaś wymáwiać będziémy przez *z*, i tak $xt + \frac{xbt'}{a}$ czyta ſię ilość xt z ilością $\frac{xbt'}{a}$. Aże oſtatni Kupiec tracić má dwudzieſtą część ſwoiégo podziáłu, dlá pewnégo záwodu; więc ta ſtrata wyráżá ſię $\frac{xct''}{20a}$ którą náleży odciągnąć od $\frac{xct''}{a}$ wezwiémy przeto za znak odciąganiá liniykę położoną w dłuż między ilościami (—) która ſię czytá u łacinników *minùs* (*mniéy*), my

Znaki Dodawaniá, odciąganiá i równości.

zaś wymawiać ią będziemy *bez*, i tak $\frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a}$ czytá się $\frac{xct''}{a}$ bez $\frac{xct''}{20a}$. Na koniec do wyrażeniá równości zachodzącéy w związkach iakiégokolwiek Pytaniá użyiémy dwóch linii równo-ległych, (=) które czytać będziémy *równé*. Przeto związek zachodzący między rzeczami znanémi i nieznanémi dostrzeżony w naszém pytaniu, to iest: że *Summa trzech zysków szczególnych równa iest massie całéy zysku e*; tak się w znakach ogólnych wyráżá:

$$xt + \frac{xbt'}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a} = e.$$

Opis Zrównaniá Funkcyi, i ich różnicy.

Takowé wyrażenie związku dostrzeżonégo między ilościami iakiémikolwiek wchodzącémi w pytanie nazywa się ZRÓWNANIEM (*Aequatio*) w którém terminy na lewéy stronie znaku równości położoné składaią PIERWSZY CZŁONEK ZRÓWNANIA, terminy zaś leżącé po prawéy stronie znaku, czynią ZRÓWNANIA CZŁONEK DRUGI. Gdybyśmy zaś oderwali uwágę od związku, który się wyráżá w Zrównaniu, i wziąwszy sám piérwszy albo obydwa razém Zrównania członki bez znaku równóści, mielibyśmy tylko zbiór terminów zamykaiących ilości znané i nieznané różnie pomięszané z sobą i złączoné znakami rożnémi n. p. $xt + \frac{xbt'}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a}$ takowy wyráz nazywá się FUNKCYĄ (*Functio*), gdzie przywiązáwszy szczególnie baczność na ilość nieznaną x, wyráz dopiéro wyłożony zowie się Funkcyą x. S tego opisaniá pokazuie się zaráz różnica między Funkcyą i Zrównaniém. *Funkcyá* bowiem iest tylko prostém wyrażeniém terminów zamykaiących rożné ilości iakimkolwiek sposobém z sobą zmięszané bez żadnégo między niémi związku. *Zrównanie* zaś wyráżá koniecznie albo związek dwóch Funkcyi, albo związek

ilości

ilości w iedney Funkcyi zawartych. Każde zadanie przed odkryciem związku między iego kondycyami będąc zbiorem myśli rozerwanych, iest tem co my nazywamy w ilościach Funkcyą, tak iako każdy rosſądek i zdanie wypadaiące z związku doſtrzeżonego między myślami to ſamo znaczy, co u nas Zrównanie. Pytanie któreśmy do roztrząśnienia przedſięwzięli uczy nas, że do Zrównania przychodzemy przez pewne ſtóſunki myśli, te ſtóſunki ciągną za ſobą rożne odmiany w ilościach, do wyrażenia tych odmian ſłużą nam rożne działania, na któreśmy natrafili w naſzych kombinacyach. Trafiliśmy zaś na te ſame które zachodzą w Arytmetyce, to ieſt na Dodawanie, Odciaganie, Mnożenie i Dzielenie ilości. Iakoż ilość ogólnieyſzemi naznaczona cechami nie traci natury ilości zależącey na możności powiękſzania ſię lub zmnieyſzania. Wſzyſtkie iey odmiany kończą ſię na tych dwóch ſtanach, które ſą ſkładem różnych ſtóſunków i związków. Zaſtanówmy ſię nad iakąkolwiek w nas myślą, znaydziemy w niey tyle odmian, ile mieć może ſytuacyi obiekt którego ona ieſt obrazem. Wſzyſtkie te odmiany wypadaią z pewnych ſtóſunków tey myśli, i potrzebuią ſwego ięzyka. To co ſię dzieie z każdą myślą, dziać ſię muſi z uwagą ilości: i działania Arytmetyczne ſą tem, czem ſą w każdey myśli rożne iey odmiany i wyrazy do tych odmian przywiązane. Są to więc ſpoſoby znaczenia wzroſtu lub ubywania ilości, które też ſame ſą w literach co i w liczbach, uczyniwſzy pewne rożnice, które będąc ſkutkiem więkſzey ogólności iuż nam ſię pokazały i pokażą ieſzcze niżey.

§. III.

Użyliśmy na oznaczenie Dodawania i odciągania dwóch znaków (+,—), z których pierwſzy czyni ilości Dodatnemi (*Quantitates Poſitivae*) a drugi Odiemnemi (*Quantitates negativae*): te atoli znaki daleko maią rozległeyſze użycie. Uważaiąc ilości ſame przez ſię, to ieſt iako mogące tylko wzraſtać lub ubywać, Tłómaczy ſię użycie znaku Dodatnego, i Odiemnego.

litery Alfabetu wyſtárczaią nám na wyrażenie naſzych myśli; ale zwáżaiąc też ilości iedne w porównaniu drugich, wpádámy uwágą na różne ſtany i ſpoſoby ieſteſtwa, w których iedna ilość zoſtaie względem drugiey. Takowe ſtany wyrážámy znakami położonemi przed literami. I tak dwa dopiero wymienione znaki (+ —) nie tylko nám ſłużą na cechowanie Dodawaniá i Odciąganiá, ale nawet na znaczenie dwóch ſtanów iakichkolwiek między ſobą przeciwnych iako to wzroſtu i ubywania, maiątku i długu, dwóch biegów lub położeń opacznych i t. d. W naſzem pytaniu naznaczyliśmy znakiem dodatnym porcye, które każdy Kupiec bráć powinien z maſſy zyſku; ſtratę zaś którą za uchybioną troſkliwość ponieść przypadło trzeciemu, nacechowaliśmy znakiem odiemnym. Skąd ſię pokazuie, że ilości odiemne maią ſwoie ieſteſtwo tak rzetelne i práwdziwe iak i ilości dodatne, tylko że w ſpoſobie między ſobą przeciwnym. A przeto wyobrażenie ilości odiemnych nie zawiſło od tak dzikich i obłąkanych tłómaczeń, którémi niektórzy Autorowie uczących ſię bałamucą. Ieżeli to ieſt prawo dla ludzkiego rozumu, że we wſzyſtkich poznáwaniach nie może przeniknąć do práwdy tylko drogą porównywaniá, rostrząſaiąc naturę ilości wpada w konieczną potrzebę uwážaniá ich iedne względem drugich, a przeto znaki na wyrażenie tych względów i ſtánów ſą mu nieprzerwanie potrzebne. We wſzyſtkich więc działaniach, na którésmy w Pytaniu natrafili nie powinniśmy rozłączać uwági nad naturą ogólną ilości od uwági ich ſtánów, w których ſię iedne względem drugich znayduią; bo każde iakiegokolwiek rodzaiu pytanie wciągá nás koniecznie rázem w obydwie te uwági.

Opiſuie ſię Dodáwanie i Odciąganie Algebraiczne skąd wyciągaią ſię prawidła na te działaniá.

S tey Metafizyki wypádaią różne początki działań. I tak dwie albo więcey funkcyi złożonych z różnego ſtanu ilości mogą ſię łączyć z ſobą zoſtawiwſzy wſzyſtkie ilości przy tym ſamym ſtanie, w którym ſię przed tem złączeniem znaydowały, to ieſt: zoſtawiwſzy ie przy tych ſamych znakach, i takowe Działanie

nie zowie ſię *Dodáwaniém Algebraiczném*. Chcąc dodadź funkcyą $a+bf-c$ do funkcyi $de+bf-g$ znaczémy to działanie tak: $(a+bf-c)+(de+bf-g)$, a chcąc ie wykonać, nie potrzeba do tego tylko napiſać ie razém z ſwémi znakami przy ſobie, á ſumma będzie $a+bf-c+de+bf-g$; ilość bowiem na początku iakiéy funkcyi napiſaná bez znaku, zawſze ieſt dodatna, i tak de iedno znaczy co $+de$, a iedno ieſt co $+a$. Z umowy bowiem znak dodatny na początku nigdy ſię nie zwykł piſać. Takim ſpoſobém złączyliśmy trzy porcye zyſku xt, $\frac{xbt'}{a}$, $\frac{xct''}{a}$ położywſzy ie przy ſobie z témi ſamémi znakami $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}-\frac{xct''}{20a}$ wſzyſtkié té porcye maią znaki odpowiadaiącé pewnym względom, w których ſię iedné w porównaniu drugich znayduią.

Powtóre Funkcyá iaká łączyć ſię może z drugą odmieniaiąc we wſzyſtkich ilościach ſtán ich na ſtán przeciwny, to ieſt: odmieniaiąc wſzyſtkié znaki na przeciwné, takowé Działanie, zowie ſię *Odciąganiém Algebraicznèm*. Chcąc więc odciągnąć funkcyą $ax+by+e-cd-b$ od funkcyi $ax+by+cg+fm-e+cd+b$ znaczémy to działanie tym ſpoſobem $(ax+by+cg+fm-e+cd+b)-(ax+by+e-cd-b)$, a chcąc ié wykonać, należy w Funkcyi którą odciągámy odmienić wſzyſtkié znaki na przeciwné, to ieſt + na —; — na +; á dopiéro w tak odmienionych znakach złączyć ią z funkcyą tą od któréy ią odciągamy; wykonywaiąc to w naſzym przykładzie, wypada $ax+by+cg+fm-e+cd+b-ax-by-e+cd+b$. Rozważywſzy dobrze té dwa wyłożoné działaniá wciągaiącé nas w uwágę znaków pokazuie ſię oczywiście, że. Dodáwanie któré zawſze w Arytmetyce powiękſza ilość, w literach może ią powiękſzyć lub zmnieyſzyć, i tak do a dodaiąc $-b$ w ſummie $a-b$ w rzeczy ſaméy a zmnieyſzám ilością b. Odciąganie zaś które w Arytmetyce

zawſze zmnieyſzá ilość, tu może ią powiękſzyć; chcąc od a odciągnąć $-b$, mam $a+b$ gdzie a powiękſzám ilością b.

Tłómaczy ſię znaczenie wſpółczynników, i ſpoſób obchodzeniá ſię z niémi.

W złączeniu funkcyi przez obydwa té działaniá zachodzą terminy téż ſamé ilości zawieraiącé, kilka razy powtórzoné które zebrać ſię mogą w krótſzy wyráz położywſzy ieden z nich z liczbą zawieraiącą tylé iedności, ilé razy ten termin znayduie ſię powtórzonym w funkcyi; i tak mámy w przykładzie pierwſzégo działaniá $bf+bf$, na których miéyſcu możémy położyć $2bf$, w przykładzie drugiégo działaniá mámy $-e-e$; $+cd+cd$; $+b+b$, za które piſać możémy $-2e$; $+2cd$; $+2b$, zoſtawiwſzy zawſze w tym zbiorze ten ſám znak, którym były cechowané w ſamotności. Takowé liczby wyrážaiącé wielé razy ilość iaká znayduie ſię położoną w funkcyi, nazwiémy WSPÓŁCZYNNIKAMI (*Coëfficientes*). Ieżeliby zaś terminy iakié kilká-krotnie powtórzoné w funkcyi znaydowały ſię z znakami przeciwnémi, na ten czas zebrać náleży oſobno dodatné i odiemné, à wyraziwſzy ié przez wſpół-czynnika, odciągnąć potrzeba wſpoł-czynnika większégo od mniéyſzégo, reſzta będzie wſpół-czynnikiém terminu náleżącégo do Funkcyi przy tym znaku, którym był naznaczony wſpoł-czynnik więkſzy; gdyby zaś wſpół-czynnik dodatny był równy odiemnému, na ten czás oba té terminy będąc przeciwné zniſzczą ſię razém, i tak w przykładzie działániá drugiégo mámy $by-by$, $ax-ax$, które wypádaią z funkcyi; bo ilości nie maiącé żadnégo wſpół-czynnika wyraźnégo, maią za wſpół-czynnika iedność. Zoſtaie ſię więc funkcya prościeyſzym ſpoſobém wyrażoná ale iednéy wartości z przeſzłą: $cg+fm-2e+2cd+2b$. Gdybyśmy zaś mieli $4x-3x$ albo $3bf-6bf$, na miéyſcu piérwſzych napiſalibyśmy x, á zaś $-3bf$ na miéyſcu drugich. Ten ſpoſób przywiedzeniá do prościeyſzégo wyrazu funkcyi iakiéykolwiek ieſt oczywiſtym wypádkiém z początków dopiéro wyłożonych, gdzie nám nie trzeba zapomniéć, iż ſię nie rosciąga tylko

do

do terminów iedney natury, to ieſt zamykaiących tyleż i też ſame litery. Wſpół-czynniki więc różne nie oznaczaiąc tylko rożne powtorzenie ilości iakiey nie odmieniaią nic w iey naturze, i tak *6a* ieſt teyże ſamey natury co i *12a*. Są ony tem, czem ſą liczby mnożące w Arytmetyce, które iako wiemy natury liczby mnożney nie odmieniaią w mnogości.

Wſpół-czynniki więc oznaczaiąc pewne powtórzenie ilości, wyrażaią mnożenie Arytmetyczne, gdybyśmy zaś chcieli ilość iakąkolwiek x, powtórzyć nieoznaczonym razem b, to ieſt tyle razy, ile warta b, i w takim względzie w iakim zoſtaie b, otrzymalibyśmy ilość rozmnożoną bx, gdzie b ieſt wſpół-czynnikiem nieoznaczonym; Działanie naſze pod ten czas nazywa ſię *Mnożeniem Algebraicznem*, które ieżeli tylko chcemy naznaczyć, używamy do tego znaków wyżey wyłożonych s tą przeſtrogą, iż ieżelibyśmy chcieli oznaczyć mnożenie funkcyi iakiey s kilku terminów złożoney przez drugą iaką funkcyą, potrzeba nam obie te funkcye zawrzeć nawiaſami lub po nad nie kreſkę pociągnąć, i tak $(ax+3by+2dz)(b+2d)$ albo - - - $\overline{ax+3by+2dz}.\ \overline{b+2d}$. znaczy mnożenie funkcyi $ax+3by+2dz$ przez $b+2d$, podobnie $(cm+ny)n$, lub $\overline{cm+ny}.n$ znaczy mnożenie $cm+ny$ przez n. Ieſzcze $(ax-bx)(bc+cd)(l+m)$ znaczy tyle Mnożników (*Factor*) wchodzących w działanie ile ieſt przedzielonych nawiaſami funkcyi lub ilości. Wykonywaiąc zaś w rzeczy ſamey mnożenie kładziemy tuż przy ſobie ilości n.p. xbc znaczy x rozmnożone przez b, i znowu rozmnożone przez c. w tem mieyſcu należy nam ſię oſtrzedz, że w iakimkolwiek porządku położemy ilości w mnogości, nic nie odmieniemy w ich wartości, i tak zamiaſt xbc możemy piſać bxc albo cxb, albo bcx, nie odmieniwſzy nic w naturze mnogości; znaki bowiem ogólne ilości nie będąc tak przywiązane do pewney oznaczoney wartości iak ſą liczby, nie zawiſły bynaymniey w ſwym

Opiſuie ſię Mnożenie Algebraiczne, z czego wyciągaią ſię rożne prawidła.

w ſwém znaczeniu od porządku. Tu ieſzcze wpádá nám oczywiście w oczy, że ieżeli ilości tuż przy ſobie położoné znaczą funkcyą rozmnożoną, możémy takową funkcyą rozebrać na mnożników, oddzieliwſzy litery znayduiącé ſię we wſzyſtkich terminach funkcyi, od innych: i tak piérwſzy członek naſzégo Zrównaniá $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}-\frac{xct'''}{20a}$ wyrazić ſię może tak: $x\left(t+\frac{bt'}{a}+\frac{ct''}{a}-\frac{ct'''}{20a}\right)$ ponieważ x znayduiąc ſię we wſzyſtkich terminach ieſt mnożnikiém całéy funkcyi.

Gdy nám przypádá ilość lub funkcyą iaką ſamę przez ſię mnożyć, obchodząc ſię podług przyiętégo znaczeniá kładziémy przy ſobie ilość lub funkcyą tylé razy, ilé razy wchodzi w mnożenie, n.p. xxx. w tym przypádku zgodziémy ſię na prościéyſzy wyráz takowéy mnogości kładąc nad ilością lub funkcyą liczbę zamykaiącą tylé iedności ilé razy ta ilość lub funkcyá wchodzi za mnożnika w mnogości, i tak xxx wyrażémy krócéy x^3, $xxbbccc$ wyrażemy $x^2\,b^2\,c^3$ takowé liczby położoné nad ilościami nazywać będziémy WYKŁADNIKAMI (*Exponentes*). Chcąc więc ilość lub funkcyą iaką z Wykładnikiém mnożyć przez też ſamę ilość lub funkcyą z Wykładnikiém, nie potrzeba nám iak tylko dodać do ſiebie wykładników, á tak ſumma wykładników będzie wykładnikiém mnogości: pamiętaiąc na to, że ilość lub funkcya nie maiącá żadnégo wykładnika, uważá ſię z wykładnikiém 1. n.p. x iedno znaczy co x^1 podług tego prawidła chcąc x^2 mnożyć przez x^3 otrzymám mnogość x^5. podobnież $(x+a)^2.(x+a)=(x+a)^3$. i t.d.

Znaczenie Wykładników

Zatrzymáymy ſię teráz nad odkryciém prawideł Mnożeniá zachodzącégo w funkcyach złożonych z wielu terminów. Funkcye takowé zamykaią Ilości, Wſpół-czynniki, Wykładniki i Znaki. Co ſię tycze

wykła-

wykładników, dopiéro nauczyliśmy fię z niémi obchodzić w mnożeniu. O ilościach zaś tylé wiémy z umowy, że w mnogości nie należy nám iak tylko pifać ich tuż przy fobie: a ponieważ według opifu mnożeniá ilość mnożná tylé razy bydź powinna powtórzona ilé wárta ilość mnożącá, więc náleży nám wfzyftkié terminy w téy funkcyi zawarté przez tę ilość mnożyć: tak n. p. w $(xa+2by+c)$ d, przez d należy mnożyć każdy termin Funkcyi $xa+2by+c$, a ftąd wypadnie mnogość $xad+2bdy+cd$. S tego famégo początku wypływá: że kiedy nám przychodzi mnożyć funkcyą przez funkcyą n.p. $(xa+x^2b+c)$ $(yc+bx+m)$, náleży nám całą funkcyą $xa+x^2b+c$ mnożyć przez każdy z ofobna termin funkcyi $yc+bx$ $+m$ to ieft:

Funkcyá Mnożná - $xa+x^2b+c$
- - - Mnożącá - $yc+bx+m$

Mnożąc przez yc - - $xayc+x^2byc+yc^2$
Mnożąc przez bx - - $bx^2a+b^2x^3+bxc$
- - - przez m - - $max+mx^2b+mc$

Té dopiéro fzczgólné mnogości razém dodané i ułożoné podług wykładników x daią mnogość całką:

$$b^2x^3+bax^2+mbx^2+bycx^2+aycx+max+bcx+c^2y+mc$$

Tymże famym fpofobém náleży nám poftępować maiąc do mnożeniá więcéy funkcyi: i tak gdyby nám przyfzło dwie wymienioné funkcye $(xa+x^2+c)$ - $(yc+bx+m)$ mnożyć iefzcze przez trzecią $az+by+n$, náleżałoby nám całką dopiéro wynalezioną mnogość mnożyć przez każdy z ofobna termin trzeciéy téy funkcyi, a tym fpofobém przyfzlibyśmy do mnogości trzech wzmiankowanych funkcyi.

Maiąc do mnożeniá Wfpółczynników przed ilościami, proftá uwága nad ich naturą przekonywá nás, że ich należy famych przez fię mnożyć, a wypádaiącá ftąd liczba rozmnożoná będzie wfpół-czynnikiém mnogości Algebraicznéy. Iakóż chcąc $2x$ mnożyć przez $3c$ potrzeba $2xc$ trzy razy iefzcze powtórzyć, s czego

wypadnie

wypadnie $6xc$: podobnie $(6ax+2b)10.x$ daie w mnogości $60axx+20bx$.

Prawidło na znaki wyciągá się z opisu mnożeniá.

Zostaie nám teráz wynaleśdź prawidło na znaki. Wróćmy się myślą do naszych początków. Powiedzieliśmy naprzód s przekonaniá że w działaniach iakichkolwiek nigdy nie możémy odłączyć uwági ogólnéy nad ilością od uwági nad iéy stanem w którym się iedna względem drugiéy znayduie. Nauczyliśmy się powtóre z opisu mnożeniá że ilość mnożná nie tylko bydź powinna tylé razy powtórzoná ilé wártá ilość mnożącá, ale ieszcze bydź powinna w tym samym względzie powtórzoná, w iakim zostaie taż ilość mnożącá: więc kiedy nám przychodzi $xa-b$ mnożyć przez a, ponieważ a má znak Dodáwaniá; znak zaś Dodáwániá wyráżá złączenie ilości zostawiwszy ié przy tych samych znakach przy których przedtém zostáwały, idzie zatém że mnogość która bydź zawsze powinna iednéy natury z ilością mnożną, powinna mieć téż samé znaki, któré ma ilość mnożná, zaczém $(xa-b)a$ daie mnogość $xaa-ba$. W piérwszym terminie xaa mnogości, mnożyliśmy znak dodatny $+xa$. przez znak dodatny $+a$; i wypádł nám znak dodatny $+xaa$; w drugim $-ba$ mnożyliśmy znak odiemny $-b$ przez znak dodatny $+a$ i otrzymaliśmy znak odiemny $-ba$. Więc w mnożeniu + przez + daie +; zaś — przez + daie —. Maiąc zaś do mnożeniá $xa-b$ przez $-c$, ponieważ $-c$ má znak odciągániá; znak zaś odciąganiá każe nám odmieniać wszystkié znaki; idzie za tém, że mnożąc przez $-c$, w każdym terminie funkcyi $xa-b$ odmienić powinniśmy znak na znak iemu przeciwny, i tak wypadnie mnogość $-xac+bc$. Tu znowu mnożąc znak dodatny $+xa$ przez odiemny $-c$, otrzymaliśmy iak w piérwszym przykładzie znak odiemny $-xac$; mnożąc zaś znak odiemny $-b$ przez znak odiemny $-c$, otrzymaliśmy znak dodatny $+bc$. Łącząc więc ten wypádek z przeszłym, wyciągniémy prawidło ogólné na znaki w mnożeniu: to iest że: w

mnożeniu

mnożeniu, też same znaki bądź to dodatny + przez dodatny +; bądź odiemny — przez odiemny —, daią zawsze w mnogości znak dodatny; znaki zaś rożne to iest dodatny + przez odiemny —, albo odiemny — przez dodatny +, daią zawsze w mnogości znak odiemny —. Zebráwszy razém té wszystkie prawidła którešmy s tak prostych i oczywistych wyciągnęli początków, użyiémy ich w następuiącym przykładzie:

Mnożyć - $ax^2+2by-c$
przez - $3dx-m$

Mnogość $3adx^3+6bdyx-3dcx-max^2-2bym+mc$

Dla większéy wprawy czytelnika przyłączámy tu Táblicę różnych przykładów.

W każdéy Nauce pewnéy chcąc dosiąc práwdy iakiéy ogólnéy, nie dosyć nám iest rozwiązać iakowé zadanie prowadzącé nás do ważnych iakich początków, ale ieszcze dlá dostatecznégo przekonaniá powinniśmy rozwiązać zadanie wywrotné; to iest: wrócić się od ostatnich wynalezionych wypádków do pierwiastków naszégo zadaniá. I tak od części przyszedłszy do pewnégo składu, należy nám ieszcze od tego składu wrócić się do części, s czégo dwoiako korzystámy; naprzód zostawiámy rozum nasz w nieprzepartéy pewności o naszych początkach; powtóre odkrywámy nowé práwdy rostrząsaiąc przypádki przeciwné pierwszym. W poprzedzaiącém działaniu odkryliśmy prawidła prowadzącé nas od Mnożników do ilości rozmnożonéy; teráz chcąc od ilości rozmnożonéy zniżyć się do Mnożników, potrzeba nám tén skład który z mnożeniá funkcyi powstáł rozebrać, i odkryć pewné przepisy prowadzącé nás do tego rozbioru. W takowém zadaniu zachodzą trzy rzeczy: funkcya podaná, i dwié funkcye prościéysze składaiącé pierwszą. Tamta nazywá się funkcyą *Podzielną*, iedna z dwóch ostatnich *funkcyą dzielącą*. Z dwóch tedy funkcyi znanych, to iest podzielnéy i dzielącéy, wynaleśdź trzecią, którą nazwano *wielorazém*, znaczy dzielić funkcyą iednę przez drugą. S tego Opisu wynikaią na-

Dzielenie Algebraiczné i reguły mu słuzącé.

B stępuiącé

ſtępuiące prawdy: Ieżeli funkcyá dzieląca wchodzi całkiem w ſkład funkcyi podzielney, dzielenie odbydź ſię może zupełnie, á przeto wieloráz otrzymać powinniśmy w wyrazie ſkończonym: ieżeli zaś funkcyá dzieląca nie ieſt prawdziwym elementem funkcyi podzielney; rozbiór tey funkcyi bydź nie może doſkonałym, a zatem wieloráz wypaśdź musi z oſtatkiem nie zupełnie podzielnym. Ponieważ więc w dzieleniu zachodzi ieden warunek, to ieſt: ieżeli funkcyá ma bydź doſkonale podzielną, potrzeba aby funkcyá dzieląca cała była ſkładaiącą iey częścią; ten warunek czyni to działanie ſzczególnieyſzem nad mnożenie i ieſt przyczyną, dla czego nie każde dzielenie bydź może doſkonałe kiedy każdá mnogość ſtaie ſię zupełną z iakichkolwiek mnożników.

Przyſtąpmy iuż do wynaydowaniá prawideł dzieleniá na ilości, wſpół-czynniki, wykładniki i znaki. Ponieważ dzielenie rozebrać powinno ten ſkład, który z mnożeniá powſtał, idzie za tem że prawidła iego bydź powinny przeciwne tym, ktoreśmy na Mnożenie odkryli. Więc ieżeli mnożąc kładziemy tuż przy ſobie litery Mnożników; dzieląc powinniśmy mazać w funkcyi podzielney litery funkcyi dzielącey; i tak xb chcąc rozdzielić przez b, mażę b w funkcyi podzielney, i zoſtaie ſię na wieloráz x, to ieſt: $\frac{xb}{b}$, daie x. Powtóre ſzukaiąc mnogości mnożyliśmy wſpół-czynniki przez ſię, więc ſzukaiąc wielorazu dzielić powinniśmy wſpół-czynnika funkcyi podzielney przez wſpół-czynnika dzielącey: n.p. chcąc $12xb$ rozdzielić przez $3b$; dzielę 12 przez 3, potem zmazáwſzy b podług prawidła $1go$, otrzymuię wieloráz $4x$. Nakoniec w mnożeniu dodawaliśmy do ſiebie wykładniki, więc w dzieleniu náleży nám odciagać wykładnika funkcyi dzielącey od wykładnika podzielney, i takim ſpoſobem $12x^4b^2$ rozdzieliwſzy przez $3x^3b$ otrzymám za wieloráz $4xb$. S kąd ſię wnoſi oczywiście iż gdyby nám przypadło dzielić takie funkcye,

kcye,

kcye, w którychby wykładnik dzielącéy był większy od wykładnika podzielnéy, wieloráz wypadnie z wykładnikiém odiemnym równaiący się ułomkowi maiącému za licznika iedność, a za mianownika tenże wieloráz z wykładnikiém dodatnym n. p.

$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ s kąd się wnosi że wyrazy - - x^{-2}, y^{-3}, ba^{-m}, równé są tym - $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^3}, \frac{b}{a^m}$, i t. d.

Cóż za prawidła będą na znaki? Przypomniymy sobie że w mnożeniu znaki téż samé wydały nam záwsze znak dodatny mnogości; znaki zaś rożné rodziły znak odiemny. Więc ponieważ wieloráz z funkcyą dzielącą są dwiéma częściami, z których przez mnożenie powstać powinna funkcyá podzielná; znaki wielorazu tak powinny odpowiadać znakom funkcyi dzielącéy, ażeby z nich wypadły koniecznie w mnożeniu znaki funkcyi podzielnéy: i tak maiąc do dzieleniá x^2b przez b, ponieważ funkcyá podzielná x^2b má znak dodatny, który nie mógł powstać, tylko z znaków tychże samych, idzie zatém, że wieloráz mieć powinien tenże sám znak, który má funkcyá dzielacá; przeto $+x^2b$ rozdzielone przez $+b$ daie $+x^2$ to iest: znak dodatny rozdzielony przez znak dodatny, daie w wielorazie znak dodatny. Taż sama przyczyna przekonać nás powinna, że dzieląc x^2b przez $-b$ wieloráz wypaśdź powinien $-x^2$; przeto znak dodatny rozdzielony przez znak odiemny daie w Wielorazie znak odiemny. *Prawidło na znaki w Dzieleniu.*

Jeżeli zaś mamy $-x^2b$ dzielić przez b ponieważ $-x^2b$ nie mogło w mnożeniu powstać tylko z znaków przeciwnych, więc Wieloráz mieć powinien znak przeciwny znakowi funkcyi dzielącéy, zaczém $-x^2b$ rozdzielone przez b daie $-x^2$ to iest: znak odiemny rozdzielony przez znak dodatny daie w Wielorazie znak odiemny. Nakoniec maiąc $-x^2b$ dzielić przez $-b$ z dopiéro powiedzia-

nego dowodu wypada w Wielorazie $+x^2$. Więc znak odiemny rozdzielony przez znak odiemny daie w Wielorazie znak dodatny. Zebrawfzy te wfzyftkie przypadki razem, pokazuie fię że prawidło na znaki w dzieleniu ieft toż famo, ktoreśmy wyciągnęli na mnożenie ilości, to ieft: że znaki też fame bądź to + przez +, bądź — przez —, rodzą w Wielorazie znak dodatny; znaki zaś przeciwne to ieft + przez —, albo — przez +, wydaią znak odiemny. Do tych wfzyftkich prawideł zoftaie nam iefzcze przydadź iednę uwagę: Wyciągnęliśmy byli z natury mnożenia ten przepis: że potrzeba funkcyą mnożną całą mnożyć przez każdy z ofobna termin funkcyi mnożącey, s tąd wypada tyle mnogości fzczególnych, ile ieft terminów funkcyi mnożącey, s których dopiero razem zebranych powftaie mnogość całka. Temu prawidłu odpowiadać powinno przeciwne w dzieleniu. Funkcya nafamprzód podzielna uważana bydź powinna iako powftaiąca z tylu mnogości fzczególnych, ile terminów zamyka wieloraz, każdy więc termin wielorazu zniszczyć powinien iednę mnogość fzczególną w funkcyi podzielney. Zaczem przez każdy termin Wielorazu świeżo wynaleziony, mnożyć powinniśmy cała funkcyą dzielącą, i mnogość s tąd wypadaiącą odciągnąć od funkcyi podzielney: refztę zaś pozoftałą w funkcyi podzielney dzielić znowu przez pierwfzy termin funkcyi dzielącey, powtarzaiąc za każdym razem mnożenie terminu nowego w Wielorazie przez całą funkcyą dzielącą, i odciąganie tey mnogości od funkcyi podzielney. Przeto aby to działanie wypadało porządnie, należy funkcyą podzielną ułożyć podług wykładników iakowey ilości, począwfzy od naywyżfzego fkończyć na nayniżfzym, lub na tych terminach w których fię ta ilość główna nafzego porządku nie znayduie; a to dla tego, że w mnożeniu taki zachodzi układ ilości, iako każdego przykłady przekonaią. Przyftófóymy teraz te prawidła do dzielenia funkcyi.

Funkcya

Funkcyá Podzielná, $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ } Wieloráz
- - - Dzieląca, $x - a$ } $x^2 - 2ax + a^2$

Mno: z x^2. przez funk:dzi: $x^3 - ax^2$
Reſzta pozoſtała z odciąg: $-2ax^2 + 3a^2x - a^3$
Funkcyá Dzieląca - - - $x - a$

Mnog: z $-2ax$ przez funk:dziel: $2ax^2 + 2a^2x$
Reſzta z odciągnieniá - - - - $a^2x - a^3$
Funkcyá Dzieląca - - - - - - $x - a$

Mnogość z a^2 przez funkcyą dzieląca $a^2x - a^3$

Reſzta - - - - - 0 0.

to ieſt: pierwſzy termin x^3 Funkcyi podzielnéy dzielę przez x, wypádá na wieloráz x^2, przez tén termin wielorazu mnożę funkcyą dzieląca $x - a$, i powſtaie s tąd mnogość ſzczególná $x^3 - ax^2$; odmieniam w niéy znaki na przeciwné podług przepiſów odciągania, i odtrąciwſzy ią od funkcyi podzielnéy, wypádá reſzta $-2ax^2 + 3a^2x - a^3$, któréy pierwſzy termin $-2ax^2$, dzielę przez pierwſzy termin x fynkcyi dzielącey, otrzymuię nowy termin wielorazu $-2ax$, przez który mnożę funkcyą dzielącą i tę mnogość odciagam od pozoſtałéy funkcyi podzielnéy. Tož ſamo powtárzaiąc daléy, przyidę do wyczérpaniá zupełnégo funkcyi podzielnéy otrzymáwſzy zero za reſztę która kończy moié działanie.

Gdybyśmy zaś mieli do dzieleniá funkcyą podzielną przez funkcyą dzielącą taką, ktoráby nie była cząſtką ſkładaiącą pierwſzéy; działaiąc podług dopiéro wynalezionych przepiſów, wieloráz rościągnie ſię bez końca, iako każdégo przekoná przykład pod znakiem (B) podany na Táblicy przykładów, która ſię dlá wprawy Czytelnika przyłączá.

Pozoſtały nám ieſzcze Funkcye łomané: w nich té ſamé działaniá zachodzą, któreśmy wykonywali w cáłkich. Wiémy naſámprzód z Arytmetyki, że ułomek nic innégo nie wyráżá, tylko ſtóſunek dwóch

 ilości

Z natury Funkcyi ułomkowych wypadaią prawidła działań w nich zachodzące.

ilości zachodzący między miarą porównywania zawartą w mianowniku, i pewną iaką wielkością którą zowiemy licznikiem: i dla teyci to przyczyny wyraz ułómkowy wzięliśmy sprawiedliwie za znak dzielenia. A ponieważ natura iakieykolwiek ilości zawisła od iedności, z którą ią stósuiemy; zawisła od mianownika wyrażaiącego też iedność. Przeto ieżeli nie można dodawać lub odciągać ilości tylko iedney natury; nie można dodawać lub odciagać ułomków, nie przywiodłszy ich do teyże samey iedności czyli do iedney powszechney miary porównywania. Prawda: że znaki dodawania lub odciagania wyżey obrane wystarczaią nam do cechowania tych działań nawet między ułomkami rożney natury; ale chcąc wykonać to, o czém nas te znaki ostrzegaia, istotną iest kondycyą przywieśdź ie do iedney powszechney miary, czyli do iednego mianownika, nie odmieniwszy nic w ich szczególnych wartościach: i tak chcąc dodadź lub odciągnąć ułomki $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ do lub od ułomku $\frac{xb}{m}$ znaczemy pierwsze s tych działań przez $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xb}{m}$ drugie zaś przez $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{xb}{m}$: chcąc zaś wykonać obydwa te działania należy ułomek $\frac{x}{a}$ przywieśdź do mianowników b, m, razém; ułomek $\frac{y}{b}$ do mianowników a, m; ułomek nakoniec $\frac{xb}{m}$ do mianowników a, b; ocaliwszy każdego wszczególności wartość. To wykonać się iedynie może przez mnożenie i dzielenie razém ułomku przez te same mianowniki, do których go chcémy przywodzić. Tym bowiem sposobém $\frac{xbm}{abm}$ tyle będzie wartało ile $\frac{x}{a}$; $\frac{yam}{abm}$ tyle co $\frac{y}{b}$; $\frac{xab^2}{abm}$ tyle

tyle; co $\frac{xb}{m}$. S czego wypádá prawidło przywodzeniá ułomków do iednégo mianownika: rozmnożyć każdégo licznika przez tych wszystkich mianowników, do których chcémy przywodzić ułomek, i mnogość ze wszystkich razém mianowników podpisać za mianownika każdému ułomkowi; znaki zaś zachodzących działań zostawić przy liczniku każdégo ułomka. Itak w trzech podanych ułomkach zachowané prawidło przyprowadzi nás w dodáwaniu do $\frac{xbm+yam+xab^2}{abm}$; w odciąganiu zaś do $\frac{xbm+yam-xab^2}{abm}$.

S tego przepisu wypádá sposób przerobieniá ilości lub funkcyi cáłkiéy na ilość lub funkcyą łomaną iákiégokolwiek mianownika; chcąc n.p. xt przywieśdź do mianownika a, przez dopiéro podané prawidło otzymam $\frac{xta}{a}$. Maiąc więc do czynieniá s funkcyą zawieraiącą terminy cáłkié i ułomkowé, dla wprowadzeniá iednostayności w działanie, zaczynám od przywiedzeniá wszystkich ułomków do iednégo mianownika; powtóre ilości cáłkié przerabiám na ułomkowé tego spólnégo mianownika. W zrównaniu do którego nás zadanie przywiodło, mamy: $xt + \frac{xbt'}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a}$; w czém postępuiąc sobie podług wyłożonégo przepisu przerobiémy tę funkcyą na inną iednostayną, ale toż samo znaczącą: $\frac{20axt + 20xbt' + 20xct'' - xct''}{20a}$ czyli:

$$\frac{x\,(20at + 20bt'' + 20ct'' - ct'')}{20a}$$

 Chcąc

Chcąc dóyśdź prawidła na mnożenie iednégo ułomku przez drugi, weźmy do tego działaniá $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{c}$ gdyby nám przyfzło $\frac{x}{c}$ mnożyć przez licznika famego a drugiégo ułomku; náleżałoby nám $\frac{x}{c}$ tylé razy powtórzyć, ilé wártá a; zaczém mnożylibyśmy licznika ułomku $\frac{x}{c}$ przez a, s czego wypádá $\frac{xa}{c}$: toráz chcąc $\frac{x}{c}$ mnożyć przez $\frac{a}{b}$ mnogość $\frac{xa}{c}$, bydź powinna tylé razy mnieyfzá, ilé wártá b; a zatém náleży przez b mnożyć mianownika piérwszéy mnogości, i wypadnie $\frac{a}{b}.\frac{x}{c}=\frac{ax}{bc}$. Więc w mnożeniu ułomków náleży liczników przez liczników, i mianowników przez mianowników mnożyć.

Gdyby nám zaś $\frac{x}{c}$ przypadło dzielić przez a, náleżałoby ułomek $\frac{x}{c}$ tylé razy zmniéyfzyć, ilé wártá a; przeto mnożylibyśmy mianownika ułomku $\frac{x}{c}$ przez a, fkąd wypádá $\frac{x}{ac}$; chcąc zaś $\frac{x}{c}$ dzielić przez $\frac{a}{b}$, potrzebaby wieloráz $\frac{x}{ac}$ powiękfzyć wielkością b, to ieft rozmnożyć go przez b, fkąd wyniknie $\frac{xb}{ac}$ wieloráz

$$\frac{x}{c}:\frac{a}{b}$$

$\frac{x}{c}:\frac{a}{b}$. Tož ſamo przypadnie czynić chcąc mnogość $\frac{ax}{bc}$ rozebrać tak, ażeby otrzymać ułomek mnożny $\frac{x}{c}$. Więc w dzieleniu ułomków należy ie mnożyć na wywrot, to ieſt: mnożnika ułomku podzielnego przez mianownika ułomku dzielącego, i mianownika ułomku podzielnego przez licznika ułomku dzielącego.

§. IV.

Zbiór krótki wyłożonych wyżey początków wrácaiący nás do natury Zrównáń.

Nauczyliśmy ſię dotąd odbywać pierwſze działaniá Arytmetyczne w literach, na któreśmy natrafili rostrząſaiąc podług práwdziwych prawideł myśleniá podane ſobie do rozwiązaniá na początku tego rozdziału pytanie. Cofnąwſzy ſię myślą do zaczęciá naſzych docieczeń, pamiętámy naſámprzód że doſtrzeżony między warunkami naſzego pytaniá związek przyprowadził nás do zrówaniá $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}-\frac{xct''}{20a}=e$, któreśmy potem tak nauczyli ſię wyrazić - - - - $\frac{x(20at+20bt'+20ct''-ct'')}{20a}=e$: w tem Zrównaniu uwážaiąc tylko zbiór różnych ilości bez żádnego związku, przyſzliśmy do wyobrażeniá ſobie funkcyi. Natura funkcyi wciągła nás w uwagę różnych odmián, którym podpadać mogą ilości podług gatunku i okoliczności pytaniá. Uczuliśmy ſtąd potrzebę znaczeniá takowych odmián; i przybraliśmy ſobie do tego różne znaki działáń, z których iedne ſłużą nám na wyráženie odmián ilości co do ſtanu i położeniá, drugie zaś znaczą odmiany wártości: zaſtanowiwſzy potem myśl nad temi działaniami, ſpoſtrzegliśmy ich wielką ogólność, która nás przywiodła do rozlegleyſzych uwág, te zaś do powſzechnych prawideł podaiących nám ſpoſoby poſtępowaniá ſobie z iakiemikolwiek funkcyami, do którychby nás przyprowadzić

mogły różné pytaniá. Tákowé prawidła iako pewné wypádki naſzych ſtóſunków i rozumowáń wyrážaiąc w róžnym układzie ilości wchodzących w ſkład funkcyi, uſtanowiliśmy pewién ięzyk, czyli ſpoſób znaczeniá zwięźle i krótko naſzych myśli, kombinacyi o ilościach, ich włáſnościach i odmianach, który nazwano RACHUNKIEM (*calculus*). Przypádek więc ſzczególny iakim było naſzé pytanie ogárniony rozległéyſzą uwágą uczynił naſzé poznanie doſkonalſzém, bo nám dał odkryć tylé práwd powſzechnych, iléśmy znaleźli prawideł róžnych działáń; między któremi náleży rozróžnić té, które od umowy zawiſły, od tych, które wypadły z natury działáń: tamté bowiem ſą arbitralné, té zaś konieczné i nieodmienné. Oświecéni takową różnicą przekonámy ſię, że lubo rachunek odbywá ſię przez znaki od upodobaniá zawiſłé, wypádki atoli iego ſą koniecznie pewné i nieprzeparté, ieżeli ſą dobrze z niewątpliwych práwd wyciągnioné; tak iak dobré rozumowanié wypádaiącé s początku pewnégo i prawéy kombinacyi ieſt nieomylné, choćiaż ie wyrážámy ſłowy *arbitralnémi*: w obydwóch bowiem przypádkach doſtrzeżoné oſtatnié práwdy zawiſły od początków myśleniá albo od natury rzeczy, ále nie od znaków.

Po tych wſzyſtkich działaniach, przez które przechodzić nám w káždém dociekaniu náleży, idąc od ſtóſunku do związku, od związku do odkryciá rzeczy nieznanéy; ſtaráymy ſię iuž wynaleſdź to, cośmy ſobie zadali. Pamiętámy, że rozwiązanie naſzégo pytaniá zależy od wynalezieniá części zyſku przypádaiącéy na piérwſzégo Kupca, którąśmy nazwali x; ieželi więc potrafiémy w Zrównaniu - - - - -

$$\frac{x(20at+20bt'+20ct''-ct'')}{20a}=e,$$

wyrazić x przez ſamé rzeczy znané $a, b, c, t,$ i t. d. i przenieść wſzyſtkié rzeczy znané przy x, na drugi członek zrównaniá

do e,

do *e*, zoſtawiwſzy w pierwſzym członku ſamo x, i nie naruſzywſzy związku między ilościami raz doſtrzeżonego, rozwiażemy podane zrównanie i wynaydziemy to, czego ſzukamy. Iakże tego dokázać? oto tą ſamą ſztuką, któréy używámy w náypotoczniéyſzém myśleniu, gdy prawdę iaką nieznaną w liczbie innych práwd poſtrzegłſzy, chcémy ią wydobydź z zamieſzania tych obrazów w których ieſt utopioná a z którémiśmy ią związali: pracuiémy ieſzcze na tén czás nad związkiém ráz upatrzonym, oddzielaiąc doſtrzeżoną práwdę od tego co ćmi iéy oczywiſtość, a zbliżaiąc do ſiebie obrazy ściśléy ſię z ſobą wiążące, tak dalece; że cała prácá naſza zależy na odmianie porządku w łańcuchu naszych myśli. Czyniémy na tén czas nowé porównywanie, uważaiąc wſzyſtkich myśli związanych znowu ſzczególniéyſzé między ſobą związki, i zbliżaiąc do ſiebie té, które ſię bardziéy s ſobą trzymaią; a to końcém wyſtawieniá ſobie nowo odkrytéy práwdy w náyiaśniéyſzym widoku.

Drogi zwyczayné myślęniá ſtóſowané do rozwiązaniá Zrównań.

Tén ſám ſpoſób zachodzi w rozwiązaniu zrównáń: ale odmieniaiąc w zrównaniu ráz wprowadzony porządek między rzeczami znanémi i nieznanemi, aby té oſtatnié oddzielić i wyrazić przez pierwſzé, na iakimże gruncie zaſádzámy tę wolność odmiany; i co nás może upewnić, że w téy odmianie nie naruſzémy raz doſtrzeżonégo i wyrażonégo związku? Na ułatwienie tego pytaniá cofniymy ſię do roſtrząſaniá iuż założonych od nás początków. Powiedzieliśmy że odkrywámy nowé práwdy, przez związek upatrzony między rzeczami znanémi i nieznanémi: ale cóż to znaczy *związać* práwdę iednę z drugą, i na czém tén związek zależy? związać iednę práwdę z drugą, ieſt to doſtrzec, że iedna práwda z pewnych myśli złożoná, ieſt to to ſamo co i drugá práwda złożoná z innych myśli, albo też z tych ſamych ale innym ſpoſobém do ſiebie ſtóſowanych; tak dale-

ce: że związek między práwdą i práwdą nie zależy tylko na upatrzonéy TOSAMOŚCI *(identitas)* iednych obrazów z drugiémi: i *rownać* iedné rzeczy z drugiémi, nic innégo nie znaczy tylko uwáżać które rzeczy w pytaniu ſą to ſamo co i drugié, albo iakim ſpoſobém iedné ſtać ſię mogą to ſamo znaczącémi, co i drugié: doſtrzegłſzy z warunków pytániá tę toſamość rzeczy, a w nię zagarnąwſzy rzecz nieznaną, mówiémy żeśmy związali rzeczy znané z nieznanémi. Cały zbiór práwd wynalezionych w iakimkolwiek rodzaiu, i cały ſpoſób myśleniá zagłębiwſzy ſię w iego roſtrząſanie przekoná nás o oczywiſtości tego tłómaczenia, z któregobyśmy tu bardzo wielé Loicznych mogli wyciągnąć uwág, gdybyśmy ſię nie báli przeſtąpić granic naſzégo zamiaru. Zrównaniá Algebraiczné nayoczywiściéy to pokazuią. Ieżeli więc dwa członki zrównaniá ſą wyrazem toſamości między iednémi rzeczami i drugiémi zawartémi w pytaniu; ta toſamość zoſtanie nienaruſzoną, czyniąc iakiékolwiek bądź odmiany, byleby té ſamé odmiany któréśmy czynili w iednym członku zrównaniá, były czynioné i w drugim. Wolno nám więc wprowadzić w zrównanie iakiékolwiek działaniá potrzebné do oddzieleniá rzeczy nieznanéy od znanych, bo té działaniá nie naruſzą bynáymniéy ráz doſtrzéżonégo związku, byleby to, co ſię rozrywa lub znosi w iednym członku dla otrzymania ilości nieznanéy ſamotnie, w drugim zaraz członku było znieſioné lub rozerwané. Chcąc więc oſwobodzić x od tych wſzyſtkich ilości znanych, z ktorémi ſię mięſzá; potrzeba nám naſámprzód uwolnić ié od dzielnika $20a$; przeto náleży obydwié ſtrony mnożyć przez tego dzielnika, i wypadnie $x(20at+20bt'+20ct''-ct'')=20ae$: chcąc potém uwolnić x od mnożnika $20at+20bt'+20ct''-ct''$ dzielić nám potrzeba przez niégo obydwa członki, a tak otrzymámy:

$$x=\frac{20ae}{20at+20bt'+20ct''-ct''},$$

gdyby

gdyby ieſzcze do tego x przydaná lub odciągnioná była iaká ilość znaná, w pierwſzym raźie przypadłoby nám ią odciągnąć; w drugim zaś razie dodadź z obydwóch ſtron zrównaniá; czyli co na iedno wyidzie. przenieśćby ią należało na drugą ſtronę z znakiem przeciwnym. Cała więc ſztuka rozwiązaniá zrównań takiego rodzaiu, iaki tu roſtrząſámy; czyli wyrażeniá ilości nieznaney przez funkcyą znanych, zależy na używaniu działań przeciwnych tym, które zachodzą z ilościami znanemi znayduiącemi ſię przy ilości nieznaney. Náypierwſzą więc ieſt rzeczą przenieść terminy zrównaniá zamykaiące ilość nieznaną na iednę ſtronę znaku równości, wſzyſtkie zaś ilości znane na ſtronę drugą, odmieniaiąc znak w tym terminie który ſię przenosi, na przeciwny: potem ieżeli ta ilość nieznaná znayduie ſię mnożoną lub dzieloną przez iakie znane, należy w pierwſzym przypádku obydwie ſtrony rozdzielić, w drugim zaś należy ie rozmnożyć przez te ſame ilości znane; a tak ilość nieznaná oſwobodzoná od wſzelkiego ſkładu, wyrazi ſię przez ſame ilości znane, i pytanie rozwiązane zoſtanie. Wártość takowá ilości nieznaney wyrażoná przez ſame ilości znane nazywá ſię Pierwiastkiem Zrównania (*Radix Aequationis*). Ieżeli pytanie naſze nie má więcey iak iednę odpowiedź, Zrównanie one zawieraiące nie dá tylko ieden pierwiaſtek i nazywá ſię Pierwszego Stopnia. Funkcye zaś takowe w które wprowadzony związek nie wiedzie tylko do iedney odpowiedzi, nazywać odtąd będziemy Iedno-kształtne (*Uniformes*).

Z poprzedzaiących uwág wyciągá ſię prawidło ogólne na rozwiązanie zrównań Igo ſtopnia.

§. V.

Z reguły dopiero wyłożoney wnosi ſię oczywiście: *Náprzod*: Że ieżeli zrównanie iakie znayduie ſię mnożonem lub rozdzielonem we wſzyſtkich terminach przez iaką ilość lub funkcyą, ta ilość lub funkcyá nie należy do zrównaniá: mażąc ią bowiem nie naruſzámy bynáymniey związku między warunkami pytaniá, tak iako podane iakie zrównanie mnożąc lub

Wypádki z reguły poprzedzaiący.

lub dzieląc całe, przez iakakolwiek funkcyą; lub dodaiąc do siebie kilka zrównań s tego samego pytaniá wypádaiących tenże związek zupełnie ocálamy. *Powtore*: Ze Zrównanie iakiekolwiek, przenioslszy w niem wszystkie terminy na iedne strone znaku równości bydź może przywiedzionem do zero, to iest do wyrazu $A=o$, gdzie A iest funkcyą iakichkolwiek ilości w Zrównanie wchodzących. Takowego wyrazu zrównań wprowadzonego od *Hariota* będziemy zawsze używać w głębszych naszych dociekaniach. Zrównanie więc pierwszego stopnia, w którém nie zachodzi tylko iedna nieznaná, wyrazić się może náyogólniey przez $x+B=o$ gdzie B iest funkcya samych ilości znanych, iego zaś pierwiastek przez $x=-B$. *Po trzecie*: Ze każdy pierwiástek Zrównániá podanego włożony za ilość nieznaną w Zrównanie $A=o$, zniesie wszystkie terminy, a przywiodłszy ie do zero *uczyni* iak mówią Geometrowie *zadosyć* Zrównaniu.

§. VI.

Równaią się wypádki Arytmetyczné z Algebraicznémi dlá obiaśnieniá i potwiérdzeniá tego co się w §. 1. mówiło.

Chcąc teráz wypádki Arytmetyczné z Algebraicznémi porównać, wróćmy się do Zrównaniá rozwiązanégo.

$$x=\frac{20ae}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$$

Wyrážaiąc podziáły zysku podług §. 2. przypádá:

na Pierwszégo Kupca $xt=\dfrac{20aet}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$

na Drugiégo - - $\dfrac{xbt'}{a}=\dfrac{20bet'}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$

na Trzeciégo - - $\dfrac{xct''}{a}=\dfrac{xct''}{20a}=\dfrac{20cet''-cet''}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$.

té trzy Zrównaniá stawiaią nám przed oczy działaniá Arytmetyczné przywiązané do natury naszégo pytaniá

tanią, a zatém pokazuią reguły, za któremi iśdź mámy, chcąc w liczbach wynaleśdź to, cośmy sobie zadali. Wiedząc bowiem znaczenia liter, ich układ odpowiadaiący pewnym działaniom, czytać możemy w naszych Zrównaniach té wszystkie reguły, któreby Arytmetyka mogła podadź w takowym przypadku: a wykonywaiąc ie, znaydziémy w szczególności każdy podział w liczbach, których summa równá iest 90.000 czyli e, ieżeli za a, b, c, t, t', t'', té włożémy wártości któreśmy sobie w §. 1. przybrali, to iest, $a=20.000$ $b=18.000$, $c=12.000$, $t=9$, $t'=12$, $t''=15$. Znáydziémy że przy tych wszystkich warunkach

na pierwszego Kupca przypádá $28,571\frac{486}{1134}$

na drugiego - - - $34,285\frac{810}{1134}$

na trzeciego - - - $27,142\frac{972}{1134}$

Umorzywszy iaki warunek w naszém pytaniu, zaráz w Zrównaniu niknie termin odpowiadaiący tému warunkowi, który opuściwszy mámy zaráz rozwiązanie pytania tym warunkiém zmnieyszonego: i tak n.p. gdybyśmy chcieli zniszczyć tę stratę którą ostatniému Kupcowi przypadá ponieść, nie potrzeba nám tylko w podziále trzeciego Kupca opuścić $\frac{xct''}{2oa}$, potém w mianowniku wszystkich zrównań $-ct''$, terminy obydwa tému warunkowi náleżyté: a wypadnie:

$$xt=\frac{aet}{at+bt'+ct''}$$

$$\frac{xbt'}{a}=\frac{bet'}{at+bt'+ct''}$$

$$\frac{xct''}{a}=\frac{cet''}{at+bt'+ct''}$$

té

Z Zrównań wyciąga ſię reguła Arytmetyczna towarzyſtwa.

té Zrównaniá wyrážaią nám bardzo iaśnie *regułę Towarzyſtwa*, to ieſt:,, że zyſk przywiązany do nierównych ſumm i czaſów każdégo Kupca, otrzymuie ,, ſię mnożąc maſsę ogólną zyſku przez czas i ſummę ,, każdégo zakładową; a mnogość dzieląc przez ſummę trzech mnogości z każdégo w ſzczególności zakładu przez odpowiadaiący mu czas,,. Ieżeli ieſzcze nawet zakłady położémy w równym czaſie, będzie $t=t'=t''=1$, otrzymámy:

$$x=\frac{ae}{a+b+c},\quad \frac{xb}{a}=\frac{be}{a+b+c},\quad \frac{xc}{a}=\frac{ce}{a+b+c},$$

i pytanie naſzé przywiedzioné do náypiérwſzégo ſtanu, odkrywá nám w Zrównaniach tę regułę, za którą idąc wynáydziémy podziáły zaráz na początku rozdziáłu wymienioné. Té wſzyſtkié korzyści tracémy działaiąc w liczbach, dlá przyczyn iuż wyłożonych, których prawdę oſtatnié té Algebraiczné wypádki daią nám iak náyoczywiściéy uczuwáć, a w nich poznáć té nieprzyzwoitości, które pokázáwſzy ſię piérwſzym wynalazcom wciągły ich w potrzebę użyciá znaków ogólnych. Widzieliśmy ieſzcze, że Zrównaniá ogólnie rozwiązané ſtawiaią umyſłowi zbiór wielu práwd i twierdzeń w nich zawarty. Wydobywanie takowych práwd z oſtatnich wypádków Algebraicznych, potrzebuie rozbieraniá tego ſkłádu myśli na inné prościéyſzé i na różné przypádki ſzczególné razém w Zrównaniu ogarnioné, co nazywaią niektórzy Geometrowie *Analyſis*, różniąc ią tém od Algebry, że ta oſtatniá poddaiąc nám tylko znaki i działaniá do gatunku pytáń przywiązané, zależy iedynie na prowadzeniu nás do Zrównaniá wyrażaiącégo wártość rzeczy nieznanéy przez znané: po czém dopiéro naſtępuie Analyſis zatrudniaiącá umyſł rozbieraniém Zrównáń na różné práwdy w nich zawarté, y wyciąganiém ogólnych práwideł ſłużyć nám maiących zawſze na rozwiązanie wſzyſtkich iakichkolwiek

Opiſanie Analysis podług niektórych Geometrów: iéy różnicá od Algebry.

kolwiek pytań związanych z tém, które nás do tych wypádków przywiodło. Zatrzymámy się ieszcze z nászém zdaniém nad tą różnicą; bo sobie zachowuiémy inną porę wytłómaczéniá obszérniéy w tym punkcie naszégo sposobu myśleniá.

§. VII.

Pytanie dopiéro rozwiązané służyć nám może za wzór do innych iakichkolwiek podobnégo rodzaiu, to iest: gdzie nie zachodzi do wynalezieniá tylko iedna rzecz nieznaná. Ale iakże sobie postąpić maiąc wiele na ráz rzeczy nieznanych w pytaniu? Pewni iesteśmy, że rzeczy nieznané w pytaniu nie wynayduią się inaczéy, tylko za pomocą dostrzeżonégo ich związku z rzeczami znanémi; że iedén dostrzeżony związek nie może nám odkryć tylko iednę rzecz nieznaną: więc maiąc wiele na ráz rzeczy nieznanych do wynalezieniá, potrzeba nám tyle związków rzeczy nieznanych z znanémi, ile zachodzi niewiadomych rzeczy w pytaniu. Potrzeba ieszcze aby każdy s tych związków był różny od innych: bo ieżeli rzeczy nieznané są práwdziwie różné, każdá z nich zawisła od innégo stósunku z rzeczami znanémi: inaczéy, pytanie naszé nie maiąc tylko na pozór wiele nieznánych rzeczy, które zależą od wynalázku iednéy, należałoby do rodzaiu pytań rostrząsanych w §§. poprzedzaiących. Idzie więc za tém, że maiąc wiele do wynalezieniá rzeczy, potrzeba nám mieć tyle Zrównáń ile zachodzi niewiadomych ilości w pytaniu, z których każdé służyć nám má do wyciągniéniá wártości iednéy nieznanéy. Gdyby każdé s takowych Zrównáń nie zawiérało w sobie tylko iednę niewiadomą ilość złączoną z wiadomémi; rozwiązawszy ié po iednému podług reguły wyżéy podanéy, odkrylibyśmy zaráz to wszystko cośmy sobie zadali. Ale ktokolwiek z nás pilnie uwáżał drogi wynalázku w piérwszém pytaniu, powiniénby teraz uczuć, że dostrzeżenie takowych związków każdéy rzeczy nieznanéy z samémi tylko znanémi, potrzebowáłoby ostatniégo wysileniá

Początki prowadzące do rozwiązaniá pytáń wiele nieznanych rzeczy zamykaiących.

naſzych myśli, i byłoby barzo małéy liczbie rozumów doſtępné. Smiém nawet trzymać że w przypádku znaczné liczby rzeczy nieznanych, byłoby niepodobné; ponieważby ciągło za ſobą wielką mnogość bardzo zawikłanych kombinacyi w iednym prawie momencie, co przechodzi granicę naydzielnieyſzéy duſzy. Wſpomágamy przeto umyſł naſz w takowych dociekaniach proſtém uważaniém związków między ilościami iakiémikolwiek. Wiémy że te wyciągaią ſię z warunków pytania: w tych zaś warunkach tak rzeczy pokazuią ſię zawikłané, iż iedna nieznaná wiąże ſię z drugą; zaczém zrównania s tąd wypadaiące będą takowé, że każdé z nich zawierać może wſzyſtkié ilości nieznané różnym ſpoſobém związané z znanémi. Obiaśniymy to przykładém.

„Iedna bryła zmięſzanégo kruſzcu z złota i ſrébra „má w ſobie obiętości (*Volumen*) dwanaście calów „kubicznych, waży zaś ſto uncyi. Pytám ſię wieléż „pod tą obiętością i wágą zamyká złota, a wielé ſré„bra? wiedząc że ieden cal kub: złota waży $12\frac{2}{3}$ „uncyi, ieden zaś cál kub: ſrébra waży $6\frac{8}{9}$ uncyi?„

W tém zadaniu mámy dwié nieznané rzeczy od ſiebie różné, ilość złota, i ilość ſrébra wchodzącą w ſkład maſsy zmięſzanéy: potrzeba nám więc dwóch związków, a z nich tyléż zrównań. W każdéy z dwóch ilości nieznanych zachodzi uważać obiętość i wagę: ponieważ zaś wiémy ciężár iednégo cálu każdégo kruſzcu, zoſtaie nám do wynalezienia ſama ich obiętość w calach, którą mnożąc przez ciężár iednégo cálu każdému kruſzcowi właściwy, wynaydziémy wágę. Nazwiymy więc obiętość złota wchodzącégo w bryłę zmieſzaną, x; obiętość ſrébra y; a rozważywſzy dobrże zadanie, wypadną nám dwa związki między témi ilościami, z których ieden należéć będzie do obiętości, a drugi do ciężáru. Naſámprzód podług

warunków

warunków pytaniá fumma dwóch obiętości krufzcowych bydź powinna równą 12: s kąd wypádá pierwfze Zrównanié - - - $x+y=12$. Powtóre: dwié tę obiętości ważyć powinny fto uncyi, aże ieden cál złota waży $12\frac{2}{3}$ uncyi, więc x całów waży $12\frac{2}{3}x$ czyli $\frac{38}{3}x$; podobnym fpofobém wypádá że y cálów frebra waży $6\frac{8}{9}y$ uncyi, czyli $\frac{62}{9}y$, ieżeli ieden cál waży $6\frac{8}{9}$ czyli $\frac{62}{9}$; s kąd wyniká drugié Zrównanie: $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$.

Mámy teráz dwa Zrównanjá $x+y=12$; $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$. s których każdé zamyká obydwié nieznané ilości. Dofyć nám ieft wniyśdź w lekkié rostrząśnienie nafzych myśli aby fię przekonać, że póty żádné s tych Zrównań nie odkryie nám wártości iakiéykolwiek nieznanéy, poki w niém drugá nieznaną ilość oznaczoną nie będzie. Dlá czégoż tylé zagadnień nie tylko w naukach moralnych i Fizycznych, ale nawet w fprawach życiá potocznych zoftaié nierozwiązanych, chociáż známy wyftárczaiącą liczbę związków do ich odkryciá? oto dlá tego, że té zagadnieniá wiążą fię z innémi rzeczami nieznanémi do których eśmy iefzcze oddzieleniá lub oznaczeniá nie przyfzli. Dáymy teráz że reflexya ciągłém zaftanowieniém fię i kombinacyą dała nám téy nieznanéy rzeczy, od któréy zagadnienie zależy, wydobydź znaczénie w innych związkach utopioné, i wyrazić ié przez famé rzeczy znané; na tén czás na miéyfce téy nieznanéy rzeczy kładziémy iéy naturę odkrytą i za-

gadnienie naſzé ułatwiámy. Cóż to znaczą té wſzyſtkié drogi myśleniá uważaiąc ié geometrycznie? oto nie mogąc rozwiązać zagadnienia mieliśmy rzeczy nieznané zwikłané we wſzyſtkich związkach: przenoſząc atoli wártość iedney rzeczy nieznanéy z iednégo Zrównaniá do drugiégo przerábiámy każdé z nich ná związek między iedną tylko nieznaną i rzeczami znanémi, a tym ſpoſobém naſzé dociekaniá przyprowádzámy do tego ſtanu, w iakim było Zrównanie naſzé wyżéy rozwiązané. Tąć to ſamą drogą iśdź nám náleży chcąc z dwóch Zrównáń $x+y=12$ - - - $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$, odkryć to, czégo ſzukámy, to ieſt: potrzeba nám wártość iednéy nieznanéy ilości wyciągnąć z iednégo Zrównaniá i włożyć ią w drugié: i tak mámy $x=12-y$, włożywſzy za x, $12-y$ w drugié Zrównanie; wypadnie $\frac{38}{3}(12-y)+\frac{62}{9}y=100$, czyli znoſząc ułomki $3.38(12-y)+62y=900$ - - $1368-114y+62y=900$: Zrównanie nie zamykáiącé tylko iednę nieznaną y, ktoré rozwiązawſzy podług §. 4. wynáydziémy $y=\frac{468}{52}=9$, więc $x=12-9=3$. Przeto w bryle mięſzanéy zamyká ſię 9. cálów kubicżnych ſrébra, a 3 cále złota.

Przyſzliśmy do wypádków barzo ſzczególnych dla tego żeśmy użyli liczb. Rozwiążmy ieſzcze to ſamo zadanie ogólniéyſzym ſpoſobém, nazwáwſzy Obiętość całéy maſsy a; ciężar iednégo cálu kubicznégo cięższégo kruszcu b; drugiégo lekſzégo c; ciężar całéy maſsy d: będzie $x+y=a$ - - $bx+cy=d$, działáiąc tym ſamym ſpoſobém co i przedtém znáydziémy - - - $y=\frac{d-ba}{c-b}$; $x=\frac{ca-d}{c-b}$. Té dwa Zrównaniá ſwą ogólnością przywiodły nás do reguły powſzechnéy na wſzyſtkié podobnégo rodzaiu pytaniá. Chcąc ią wyciągnąć

ciągnąć zrozumiymy wprzód znaczenie terminów: ponieważ c znaczy ciężar iednego calu kub:, a zaś znaczy obiętość całéy masſy, więc ca znaczy ciężar całéy masſy zrobioney z ſamégo lekſzégo kruſzcu: $b-c$ znaczy różnicę cięſzkości gatunkowych dwóch kruſzców zmięſzanych. Dwa więc Zrównania wyrażaią naſtępuiącą regułę.

„ Chcąc doyśdź obiętości kruſzcu cięższégo, rachuy „ ciężar bryły iak gdyby była zrobioná z ſamégo kru„ ſzcu lekſzégo, odciągniy ten ciężar od ciężaru masſy „ zmięſzanéy, i reſztę s tąd wynikaiącą rozdziel przez „ różnicę dwóch ciężkości gatunkowych. Wieloráz „ podziału dá obiętność kruſzcu cięższégo.

„ Chcąc zaś wynaleśdź obiętość kruſzcu podléyſzé„ go: ſzukáy ciężaru masſy, iak gdyby była zrobioną „ z ſamégo cięższégo kruſzcu, od tego odciągniy cię„ żar masſy zmięſzanéy, a reſztę rozdzieliwſzy przez „ różnicę dwóch ciężkości gatunkowych wypadnie „ obiętość lekſzégo kruſzcu.

Ta reguła nazywá ſię w Arytmetyce REGUŁĄ MIĘSZANIA (*Regula Alligationis*), za pomocą którey wielé innégo rodzaiu pytáń może ſię rozwiązać: n.p. to:

„ Iedna ſtopa kubiczná wody morſkiéy waży 74 „ funty; stopa zaś wody déſzczowéy waży 70 fun„ tów: pytám ſię wieléby potrzeba zmięſzać wody „ morſkiéy i déſzczowéy ażeby iedna ſtopa téy mię„ ſzaniny ważyła 73 funty„. Rozwiązanie tego pytaniá łatwo ſię bardzo wyciągá z naſzych Zrównań uczyniwſzy $a=1$, $b=74$, $c=70$, $d=73$ wypadnie ilość wody morſkiey $x=\frac{3}{4}$; ilość wody déſzczowéy $y=\frac{1}{4}$.

Uwági któré nás przywiodły do rozwiązaniá Zrównáń 1*go* ſtopnia zamykaiących wielé ilości nieznanych kończą ſię na tém, ażeby maiąc kilka Zrównáń między ilościami nieznanémi x, y, z, i t. d. przerobić ié na innych tyléż, z którychby każdé zamykało w ſobie iednę tylko niewiadomą. Spoſób którégo tu

użyiémy, wypáda z piérwszégo wniosku §. 5. Niech będą dwa Zrównania: - - - - - $-ax+by+c=o$ - - - - $a'x+b'y+c'=o$, chcąc wyrzucić x, mnożę całe Zrównanie piérwszé przez współ-czynnika x w drugiém, to iest przez a'; potém mnożę Zrównanie drugié przez a to iest przez współ-czynnika x w piérwszém, a tak terminy zawieraiące x w obydwóch Zrównaniach przywiodłszy do tegóż samégo wyrazu, ieżeli maią iedné znaki odciągám iędno Zrównanie od drugiégo; ieżeli zaś miałyby znaki przeciwné, dodaię ié razém: przez, co otrzymám nowé Zrównanié bez x: to iest wykonywaiąc to wszystko:

$$aa'x+ba'y+a'c=o \quad - - - \quad aa'x+b'ay+ac'=o$$

$$(a'b-ab')\,y+a'c-ac'=o \quad - - - \quad y=\frac{-a'c+ac'}{a'b-ab'}$$

Chcąc wyrzucić y aby otrzymać wártość na x; mnożę piérwszé Zrównanie przez b', drugié przez b; a odciągnąwszy tamto od tego otrzymám Zrównanie w którém nie będzie y.

$$ab'x+b'by+b'c=o \quad - - - \quad a'bx+bb'y+bc'=o$$

$$(a'b-ab')\,x+bc'-b'c=o \quad - - - \quad x=\frac{b'c-bc'}{a'b-ab'}$$

Niech będą trzy Zrównania:

$$(A)\ ax+by+cz+d=o \quad - - \quad (B) \quad - - \quad a'x+b'y+c'z+d'=o$$

$$(C) \quad - - \quad a''x+b''y+c''z+d''=o$$

działaiąc sposobém dopiéro wyłożonym, kombinuię ich dwa na ráz; i tak kombinuiąc (A) z (B) aby wyrzucić y, przyidę do Zrównania:

$$(ab'-a'b)\,x+(b'c-bc')\,z+b'd-bd'=o \quad - - \quad (D)$$

kombinuiąc potém (A) z (C) tymże samym końcém, otrzymám:

$$(ab''-a''b)\,x+(cb''-bc'')\,z+b''d-bd''=o \quad - - \quad (D').$$

Powtóre kombinuiąc (A) z (B) aby wyrzucić z, wypadnie mi:

$$(ac'-a'c)\,x+(bc'-b'c)\,y+dc'-d'c=o \quad - - - - \quad (E).$$

Kombinuię znowu (A) z (C) na tén sám koniec i przyidę do.

$(ac''$

$$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y+dc''-d''c=o \quad - - - \quad (E').$$

Tąż ſamą ſztuką kombinuię (D) z (D') abym z nich wyrzucił z, i otrzymáwſzy zrównanie na ſamo x, wyciągnę z niégo tę wartość:

$$x=\frac{(ab'-a'b)(b''d-bd'')-(b'd-bd')(cb''-bc'')}{(ab'-a'b)(cb''-bc'')-(b'c-bc')(ab''-a''b)}$$

Z tychże ſamych zrównań wyrzuciwſzy x, otrzymam na z naſtępuiącą wartość:

$$z=\frac{(b'd-bd')(ab''-a''b)-(b''d-bd'')(ab'-a'b).}{(ab'-a'b)(cb''-bc'')-(b'c-bc')(ab''-a''b).}$$

Na koniec kombinuiąc (E) z (E') wyrzucám y, i wypadnie mi zrównanie na y:

$$y=\frac{(dc'-d'c)(ac''-a''c)-(dc''-d''c)(ac'-a'c).}{(ac'-a'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c).}$$

Tymże ſamym ſpoſobém, to ieſt przez kombinacyą dwóch naráz Zrównáń, poſtępuiąc ſobie z większą ich liczbą potrafiémy ié przerobić na inné nie zamykaiącé tylko iednę ilość nieznaną. Z tych przykładów widziémy oczywiście, iak oſtatnié wypádkowé Zrównaniá znacznie ſą zawikłané; to zawikłanie tém ſię barziéy pomnáżá, im z większą liczbą Zrównáń mámy do czynieniá. Będziémy mieli ſpoſobność wyłożeniá na inném mieyſcu tych wſzyſtkich nieprzyzwoitości, któré ſą przywiązané do niedoſkonałości ſpoſobów w tym punkcie nám ſłużących.

§. VIII.

Iużeśmy ſię z náypewnieyſzych początków myśleniá i z natury Zrównáń zupełnie przekonali, że chcąc pytanie iakié zawiéraiącé kilka nieznanych rzeczy doſtatecznie rozwiązać i wynaleśdź wártość każdéy z oſobna, potrzeba nám tylé Zrównáń ilé rzeczy niewiadomych. Trafiá ſię atoli częſto, że pytanie iakié więcéy zawiéra rzeczy nieznanych niżeli w niém upatrzyć można związków różnych: na tén czas nie maiąc wyſtarczaiącéy liczby Zrównáń na przerobienie ich takié, ażeby każdé z nich zamykało iednę tylko

Tłómaczy ſię ſtán poznáwaniá, kiedy w pytaniu mniéy zachodzi związków niżeli rzeczy nieznanych: s kąd ſię wyciągá natura pytáń nieoznaczonych.

 nieznaną,

nieznaną, wszystkie sposoby na rozwiązanie pytania staią się póty bezskuteczne, poki nie dopełniemy związków brakuiących. Opuszczony w tym razie umysł od sposobów do ogólnego rozwiązania potrzebnych, ucieka się do pewnych szczególnych wartości, które podług upodobania tylu ilościom nieznanym nadaie, ile mu Zrównań brakuie. Takowe partykularne przypuszczenia są nowemi warunkami wprowadzonemi w pytanie, i razem nowemi związkami arbitralnemi zastępuiącemi mieysce koniecznych. Aże te szczególne wartości zawisły od upodobania, iako to rozciągnąć się może bez końca do iakichkolwiek wartości; tak liczba odpowiedzi na takowe pytanie bydź może nieskończona. Przechodząc bowiem wolą naszą następnie po wszystkich szczególnych przypadkach, na każdy znaydziemy inną odpowiedź przywiązaną do każdey z osobna wprowadzoney wartości. I s tych ci to przyczyn takowe pytania maią imię NIEOZNACZONYCH (*Problemata indeterminata*). Ieden nayprościeyszy przykład wystarczy nam do obiaśnienia tego cośmy dopiero mówili:

„Wynaleśdź dwie liczby których summa byłaby „równą 36.„ Nazwawszy obie te liczby nieznane x, y; mamy z warunku pytania to tylko iedno Zrównanie:

$x+y=36$ - - - $x=36-y$. W tym przykładzie widziemy oczywiście że poty nie odkryiemy znaczenia x; póki drugiey ilości nieznaney y, nie nadamy pewney wartości: kładąc więc za y iakie nam się tylko podoba liczby, każdey z nich będzie odpowiadać inna wartość na x: i tak biorąc

za y - - - - - -	1,	2,	3,	4,	5,	6,	i t.d.
Odpowiada wartość na x	35,	34,	33,	32,	31,	30,	i t.d.

a iako iśdź możemy po wszystkich liczbach iakichkolwiek w y; tak pasmo odpowiedzi na nasze pytanie ciągnąć się może bez końca. Każda s tych wartości nic innego nie iest tylko nowe Zrównanie, które w niedostatku na rozwiązanie pytania dostarczamy.

my. Przeniosłſzy uwagę naſzę z Geometryi do innych nauk i ſpráw życiá, znáydziémy w nich niezmierną liczbę takowégo rodzáiu pytań. Z kądże powſtało tylé różnych przypuſzczeń do tłomaczeniá wielu ſkutków natury, ktorémi romanſowé głowy zapełniły Fizykę? s kądże tylé rozmaitych domyſłów i ſyſtematycznych przyczyn, ktoremi w tylu naukach i ſprawach czyniémy paradę z naſzéy niewiadomości? Wſzyſtkié té pytaniá ſą względém nás nieoznaczoné, w których rozumowi brakuie doſtateczněy liczby związków do ich ułatwieniá. Záſtępuiąc imaginacya ten niedoſtatek rzeczy znanych i warunków, poddaie rożné przypuſzczeniá rozumowi; z których on wyciąga ſkutki rzetelné albo uroioné, zgodné lub opaczné ſwym początkom podług prawéy lub fáłſzywéy kombinacyi. A iako kraina domyſłu ieſt niezmierzoná, tak liczba tłomaczeń bydź musi bez granic: a rózum ludzki poty ſię błąka i gubi w niepewności poki doſtrzeżoné prawdziwé związki nie dopełnią iego potrzéb, i nie poſtawią go w ſtanie odkrycia prawdy, ktorá dzieła imaginacyi i domyſłu obalá.

§. IX.

Kiedy w innym rodzaiu poznáwaniá niedoſtatek związków w zadaniach nieoznaczonych ſtáł ſię zrzódłém tylu błędów; duch geometryczny ſzczęśliwſzy zawſze w dociekaniu i użyciu prawdy, odkrył w nim zrzódło niezliczonych i nieprzepartych wynalázków. Zatrudniymy ſię nayiaśnieyſzém tego początku wyłożeniem:

Z natury pytań nieoznaczonych wyciąga ſię barzo ogólny początek niezmiernie rozległégo w całéy Matematyce użyciá.

Ponieważ maiąc więcéy ilości nieznanych niżeli zrównáń, mámy wolność wprowadzeniá w pytanie naſzé tylé warunków i przypuſzczeń, ilé nám związków brakuie; té zaś wſzyſtkié nowé przypuſzczeniá zawiſły od upodobaniá naſzégo; więc w ſzukaniu iakiéykolwiek prawdy, możémy wprowadzić ſpoſoby iakié nám ſię tylko podobá, bylebyśmy pytanie naſzé przerobili na nieoznaczoné przez wpro-

wadzenie w nie więcey ilości nieznanych. Te bowiem zostawuiąc nám wolność zakładaniá iakichkolwiek kondycyi, daią nám prawo czynieniá takich przypuszczeń, które pytanie nasze przywiążą do takich sposobów rozwiązaniá, iakieśmy sobie obrali: Owszem możemy nawet za pomocą nowych nieznanych ilości, zaráz takowe kondycye wprowadzić, które nám natychmiást pytanie nasze rozwiążą. A iako bez naruszeniá natury rzeczy możemy w Zrównaniá iakiekolwiek wciągnąć więcey nieznanych rzeczy, tak w pytanie nasze możemy wprowadzić drogi wynalázku, iakie nám się tylko pokáżą nayprościeysze, lub założyć kondycye odkrywaiące nám natychmiást to, cośmy sobie zadali. Ten początek dobrze obięty umysłem iest ieden z náyogólnieyszych i z náyobfitszych podbiiaiący nám w iakiemkolwiek badaniu sposoby z natury swoiey proste a często bez tey pomocy w wielu pytaniach nieużyte, i że tak rzekę uporne. Używanie tego początku iest niezmierne po wszystkich Matematyki i Fizyki częściach lubo pod rozmaitą postacią i odmianą. My sami użyiemy go w ciągu teraźnieyszey nauki: abyśmy zaś tem barziey oświecili się o sposobie postąpieniá sobie z nim, przystósoymy go teraz do teoryi Eliminacyi, ktorąśmy wyżey podług innych sposobów odbyli.

Niech będą dane dwa zrównaniá:

$$(A) \cdots ax+by+c=o \cdots (B) \cdots a'x+b'y+c'=o$$

chcąc ie przerobić na inne dwa, z którychby iedno zawierało samo x, drugie zaś samo y; biorę trzecią nieznaną ilość m, i przez nię rozmnożywszy pierwsze zrównanie, dodaię ie do drugiego, s czego wypadá:

$$(C) \cdots (ma+a')x+(mb+b')y+mc+c'=o$$

ponieważ do rozwiązaniá mego pytaniá założoná iest kondycyá, aby n.p. z zrównaniá (C) wypadło x; maiąc iuż prawo wprowadzeniá iey, czynię $\cdot\, ma+a'=o \; (D)$. i zostaie mi się $\cdots (mb+b')y+mc+c'=o \cdots$

$$y=-\frac{mc+c'}{mb+b'}$$

Zro-

Zrównanie (D) nazywa ſię **ZRÓWNANIEM WARUNKOWEM** (*Aequatio Conditionalis*) ſłużące na oznaczenie nowéy nieznanéy ilości m. Iakóż z (D) wyciągám $m = -\frac{a'}{a}$, a włożywſzy tę wártość za m w y, wypadá $y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$.

Chcąc zaś z Zrównaniá (C) wyrzucić y, czynię - - $mb + b' = o$ i zoſtaie mi ſię $(ma + a')x + mc + c' = o$ - - - $x = -\frac{mc + c'}{ma + a'}$; włożywſzy w x za $m = -\frac{b'}{b}$ iego wártość: otrzymám, - $x = \frac{bc' - b'c}{b'a - ba'}$

Maiąc trzy Zrównaniá:

$$ax + by + cz + d = o \quad \cdot \quad - \quad a'x + b'y + c'z + d' = o$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = o$$

ponieważ z każdégo przychodzi wyrzucić dwie ilości nieznané, potrzeba wprowadzić dwie nowé nieznané, któréby mi dały prawo uczynieniá dwóch warunków potrzebnych: mnożę więc piérwſzé przez nieznaną m, drugié przez n, i dodaię wſzyſtkié trzy razém; s kąd powſtaie:

$$(ma + na' + a'')x + (mb + nb' + b'')y + (mc + nc' + c'')z + md + nd' + d'' = o.$$

chcąc teráz wyrzucić y, z, razém, czynię:

$$\left.\begin{array}{l} mb + nb' + b'' = o \\ mc + nc' + c'' = o \end{array}\right\} (D).$$

zoſtaie ſię $x = -\frac{md + nd' + d''}{ma + na' + a''}$. Dwa Zrównaniá warunkowe (D) ſłużą mi do wynalezieniá m, n, któré rozwięzuiąc podług przykładu piérwſzégo, mnożę piérwſzé z nich przez p, i dodawſzy ie razém, otrzymám - - - $(pb + c)m + (pb' + c')n + pb'' + c'' = o$ chcąc wyrzucić z niégo n, czynię $pb' + c' = o$ - - - $p = -\frac{c'}{b'}$, zoſtaie mi ſię $m = -\frac{pb'' + c''}{pb + c} = \frac{c''b' - c'b''}{bc' - b'c}$

 chcąc zaś

chcąc zaś wyrzucić m, wypádá: $pb+c=o$ · $p=-\frac{c}{b}$

$n=-\frac{pb''+c''}{pb'+c'}$ a włożywſzy za p iego wartość $=\frac{c}{b}$,

$n=\frac{cb''-c''b}{bc'-b'c}$ te dwie wártości za m, n, włożywſzy w zrównanie na x, wypáda:

$$x=-\frac{c''b'd-c'b''d+cb''d'-c''bd'+c'bd''-b'cd''}{c''b'a-ac'b''+a'cb''-a'bc''+a''bc',-a''cb'}$$

tymże ſamym ſpoſobém poſtępuiąc znaydziémy:

$$y=-\frac{ad'c''-a'dc''+a''dc'-ad''c'+a'cd''-a''cd'}{ab'c''+ab''c'+a'cb''-a'bc''+a''bc'-a''cb'}$$

$$z=-\frac{ab'd''-a'bd''+a''bd'-ab''d'+a'b''d-a''b'd}{ab'c''-ab''c'+a'cb''-a'bc''-a''bc'-a''cb'}$$

Té trzy Zrównaniá roſtrząśnioné co do układu ilości w nié wchodzących, tak iako dwa w piérwſzym przykładzie, pokáżą nám reguły ſłużyć mogącé do rozwiązaniá iakichkolwiek dwóch lub trzéch zrównáń między tyléż niewiadomémi ilościami. Wſzyſtkié iak widziémy ilości nieznané maią w ſwoich wyrazach tegoż ſamégo mianownika, i iednoſtayność ta pokázałaby nám ſię w więkſzéy liczbié Zrównáń tym ſpoſobém rozwiązánych. Stóſuiąc teraźniéyſzé trzy Zrównaniá s témı którémy w §. 7. s tychże ſamych związków przez mnożenie i kombinacyą dwóch naráz wyciągneli byli, widzémy, że tamté ſą zawikléyſzé, i zamykaiącé więcéy mnożników iak té. S kąd ſię oczywiście pokazuie; że Zrownaniá na końcu §. 7. maią w ſobie pewnégo mnożnika ſpólnégo licznikowi i mianownikowi, przez którégo rozdzieloné wzięłyby taki wyráz iak teraźniéyſzé. A iako tego mnożnika ſpólnégo nie ieſt tak łatwo doſtrzec, tak gdybyśmy mieli do czynieniá z więkſzą liczbą Zrównáń, ſpoſób §. 7. przyprowadziłby nás do barzo zawikłanych oſtatnich wypádków, któréby także zawierały iakowych mnożników zbytnich i nie należących bynáymniey

náymnie'y do naſze'go pytaniá. Tę nieprzyzwitość wiele' innych za ſobą ciągnącą doſtrzegli Geometrowie, i pracowali nad wynalezieniem takówe'y teoryi Eliminacyi, ktoráby ich w oſtatnich Zrównaniach przywiodła do wypadków nie barzie'y zawikłanych iak natura rzeczy wyciągá. Wſzyſtkie ich uſiłowaniá w tym punkcie nie były dotąd barzo pomyślne: nayſzczęśliwie'y atoli w nich poſtąpił J. P. *Bezout* Akademik Paryzki w świeżem ſwoiem dziele *(a)*. Będzie'my mieli okazyą w wyżſzych częściach Matematyki roſtrząſnąć tego Autora teoryą, i poznać iak wiele' ieſzcze do ie'y doſkonałości brakuie. Od tych nieprzyzwoitości te'n nawet ſpoſób, ktore'gośmy dopie'ro użyli, nie ieſt wyięty; że atoli w małe'y liczbie Zrównáń nie pokazuią ſię zaráz, powinniśmy go przenieść nad pie'rwſzy. Stóſuiąc go do liczby iakie'ykolwiek n Zrównáń, potrzeba nam przybrać $n-1$ ilości nieoznaczonych, przez które mnożąc tyle'ż Zrównáń dodamy ie' wſzyſtkie z ſobą; a chcąc wyrzucić $n-1$ ilości nieznanych, uczyniemy tyle'ż wſpół-czynników zero, co nám da $n-1$ Zrównáń warunkowych ſłużących na oznaczenie tyleż nowo wprowadzonych niewiadomych ilości. Chcąc te' $n-1$ Zrównáń rozwiązać, przybierze'my znowu $n-2$ ilości nieznanych, przez które rozmnożywſzy tyle'ż warunkowych Zrównáń i dodawſzy wſzyſtkie $n-1$ z ſobą, wyciagnie'my tym co i przedte'm ſpoſobe'm $n-2$ innych nowych Zrównáń warunkowych. S tych znowu rozmnożywſzy $n-3$ przez tyle'ż nowo wprowadzonych ilości nieznanych, przyidzie'my do tyle'ż nowych innych warunkowych Zrównáń, których liczba za każde'm działanie'm i kombinacyą zmnie'yſza ſię iednością, aż naoſtatek przyſzedłſzy do dwóch oſtatnich Zrównáń, i s temiż podobnie poſtąpiwſzy odkrye'my, wártości $n-1$ ilości nieznanych, ktore'smy wprowadzili. Na każdą zaś ilość nieznaną w Zrównánia podane' wchodzącą te'ż ſame' działaniá powtarzaiąc przyidzie'my do

(a) Théorie générale des Equations Algebriques, à Paris 1779.

do wyrażenia każdéy w fzczególności nieznanéy przez funkcye znanych, na czém rozwiązanie Zrównania zależy. Łatwo nám barzo przekonać fię z wyżfzych wiadomości, że wfzyftkie Zrównania pierwfzégo ftopnia, w których wiele nieznanych ilości zachodzi, wyftawić możémy w tém ogólném:

$$ax+by+cz+du+ \text{ i t. d. } - - - +k=o.$$

§. X.

Zrożności Pytań wykładaią fię rożne gatunki Zrównań i włafności im służące.

Nie zafzkodzi nám tu powtórzyć to, cóśmy iuż wyżéy namiénili, że maiąc do rozwiązania iakowégo pytania tyle Zrównań ile nieznanych ilości, potrzeba koniecznie, aby każde s tych Zrównań wyrażało inny związek; potrzeba więc aby iedno Zrównanie nie było funkcyą drugiégo; inaczéy, wypádki nasze nic nie będą znaczyć: i tak n.p. gdyby pytanie iakie przywiodło nás do takich dwóch Zrównań - $6x+2y-16=0$ - - - $3x+y-8=0$; wynaydziémy

$$\frac{16-2y}{6}=\frac{16-2y}{6}$$ Zrównanie, które zamykaiąc z obydwoch ftron téż famé ilosci i terminy, nic nás nie uczy i nazywa fię TOSAME *(Aequatio identica)*: przyfzliśmy zaś do takiégo Zrównania dlá tego, że z dwóch początkowych Zrównań drugie nic innégo nie ieft, tylko piérwfzé rozdzielone przez *2*, co nowégo związku nie wyráżá: i takowé przypádki lubo fię zdaią na pozór zamykać tyle Zrównań ile potrzeba, náleżą atoli w rzeczy faméy do klafsy pytań nieoznaczonych. Utkwiymy to fobie teráz w pamięci, że Zrównania tofamé nie wyrážaią żadnégo związku między ilościami, że ich związek cały na tém zależy, iż każdy termin iednégo członka ieft ze wfzyftkiém równy terminowi podobnému drugiégo. *Powtóre*: że wfzyftkie Zrównania wyrażaią *tofamość*, bo wyrażaią związek podług §. 3. ale przez to nie wfzyftkie Zrównania fą tofamemi, ale tylko té; które wyrażaią tofamość co do ftófunku i co do terminów. Przytrafić fię iefzcze może, że związek w iedném Zrównaniu będzie

będzie przeciwny związkowi drugiego, i tak n. p. gdybyśmy przez iakié pytanie przyszli do takich dwóch Zrównáń - $y+12x-42z=0$ - $2y+24x-32z=0$ rozwiązawszy ie znáydziémy $42=16$; ta nieprzyzwoitość ostrzéga nás o przeciwnościach które się wmięszały w warunkach naszégo pytaniá, a zatém o niepodobieństwie wyciągnieniá z niego práwdy.

Rostrząsnęliśmy dwa przypádki Zrównáń piérwszégo stopnia, *piérwszy*: kiedy tylé wypádá związków ilé ilości nieznanych; *drugi*: gdy iaká liczba takowych związków brakuie: wystawić sobie ieszcze można *trzeci*: kiedy liczba Zrównáń większa iest od liczby niewiadomych ilości. Takowy zbytek Zrównáń ścieśnia tém barziéy naszé poznáwanie, im iest większy: tak iak niedostatek związków rościągá daléy naszę wolność myślenia aż do krainy imaginacyi i domysłu. Każdé bowiem Zrównanie zawiéra inszé warunki, którym będąc obowiązani uczynić zadosyć, muszémy ieszcze przypádki pewné dzielić na swoié klassy, i w tych naznaczać excepcye przywiązané do kondycyi w zbytnich Zrównaniach zawarté. Znaydujémy się na ten czás w podobnym stanie owégo badacza natúry, który dostrzegłszy iakiégo prawa między pewnémi skutkami ciał, rościągnął ie odważnie do wszystkich okoliczności mieyscá i czasu, w którym takowé skutki dziać się mogą: wtém nowa iaka obserwacyá odkryła mu przypádek odstępuiący od tego prawa, i dała mu poznáć że iégo początek podlegá excepcyi do pewnéy odmiany czasu lub mieyscá przywiązanéy, którá ograniczá iego ogólność. Nowa ta obserwacyá nic innégo nie iest, tylko nowy zbytkuiący związek ścieśniaiący iego prawo i myślenie. Widziémy przeto że iak niedostatek tak zbytek związków w iednéy rzeczy, iest myśleniu naszému szkodliwy; iak piérwszy przez uszczególnianie, tak i drugi przez zbyt śmiałe upowszechnianie myśli bydź może zrzódłem błędu. Piérwszy káże nám bydź pracowitémi w dochodzeniu práwdy, drugi uczy nás

oſtrożności w iéy ſtóſowaniu; obydwa obiaśniaią nás o ſtanach i drogach naſzégo rozumu w poznáwaniu rzeczy: przekonámy ſię o tém w dalſzym ciągu naſzéy nauki.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Uwági nad początkami iuż odkrytemi prowadzą nás do Zrównań wyżſzych Stopni, do poznania Funkcyi Wielo-kształtnych i działań im ſłużących; z których przychodzemy do rozwiązania Zrównan Drugiego Stopnia, ich własności, i do nowych początków myślenia wciągaiących nás w rozległéyſzé poznawanie Zrównań i Funkcyi.

§ XI.

Nowy rodzáy Zrównáń odkrywá nám różné potęgi w Funkcyach i działania im właściwé.

Abyśmy nic nie odſtąpili od łańcucha naſzych myśli ciągniéymy daley uwági nad ſpoſobém Eliminacyi, który przerábiaiąc Zrównania między wielu ilościami nieznanémi przywodzi ié do tego rodzaiu Zrównáń piérwſzégo ſtopnia, któryśmy naſámprzód roſtrząſali. Wſzyſtkié Zrównania wielé ilości nieznanych zawieraiącé któréśmy brali za przykłady naſzych działań powſtawały z funkcyi iednokſztaltnych i były takiego wzoru: $ax+by+cz+$ i t. d. $+k=o$, gdzie ilość nieznaná była mnożoną przez ſamé tylko ilości znané w każdym terminie. Ale kto przywykł cokolwiek do rozległéyſzégo poznáwania rzeczy, powinien ſobie pomyślić, że pytanie przywieść nás może do takowych Zrównáń, w których ilość nieznaná będzié mnożoną przez drugą nieznaną: na ten czas do rozwiązania mieć będziémy Zrównania pod takiémi wzorami:

wzorami: $xy+by+a=o$ - - - $xyz+yz+c=o$ - - - - - $xzuy+yzu+byx+$ i t. d. $+e=o$ - - i t. d. Dáymy n. p. że przyſzedłſzy do dwóch takich Zrównań $xy+by=a$ $y=bx+c$ włożémy wártość za y s tego oſtatniego w pierwſzé; przerobiémy ié na $bx^2+(b^2+c)x+bc=a$. Przyſzedłſzy do trzech takich $xyz+yz+c=d$, - - - $y=bx+c$ - - - $z=x+d$, a włożywſzy za y, z, wártości z dwóch oſtatnich w Zrównanie pierwſzé; przerobiemy ié na - $x(bx+c)(x+d)+(bx+c)(x+d)+c=d$, czyli na $bx^3+(c+bd+b)x^2+(cd+c+bd)x+cd+c=d$. - - Takowym ſpoſobém przyſzliśmy práwda do Zrównáń nie zamykaiących tylko iednę nieznaną ilość, aleśmy onégo nie przywiedli do rodzaiu, w którym ſię znaydowało náypierwſzé naſzé Zrównanie rozwiązané w §. 4. rozdziału 1. Wſzyſtkié więc tam rozumowania naſze i prawidła z nich wyciągnioné ſtaią ſię w teraźnieyſzym przypádku dlá nás nieużyteczné; ponieważ w Zrównaniu $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$ wſzyſtkié Rozdziáłu pierwſzégo działaniá wyczerpáwſzy, nie przyidziémy nigdy do wyrażeniá x przez funkcyą ſamych ilości znanych a, b, c. Gdyby nawet w Zrównaniu naſzém nie znaydował ſię termin $(c+b^2)x$, ale tylko $bx^2+bc=a$, i tak ieſzcze kuſzeniá naſzé podług pierwſzych ſpoſobów byłyby daremné, dlá tego że ilość nieznaná ieſt ſaméy ſiebie mnożnikiém. Pamiętni na ſpoſoby do rozwiązaniá Zrównáń w §. 1. użyté, a oświeceni razém przyczyną dla czégo té w teraźnieyſzym przypádku nie mogą nám pomóc, wpadámy łatwo na tę uwágę: że działanie przywiązané do teraźnieyſzégo ſtánu ilości nieznanéy, ieſt zapewne inné od tych, króré nám tam ſłużyły. Iakóż ilość nieznaná nacechowaná wykładnikiém iakimkolwiek pokazuie mnożenie ſaméy przez ſię; mnożyć zaś ilość lub funkcyą ſamę przez ſię nazywa ſię w Arytmetyce *Wynoſić ią do potęgi*: aże działaniá Arytmetyczné té

ſame zachodzą w literach co i w liczbach, należy nam zatrzymać ſię teraz nad tym nowym ich gatunkiem.

Pokazuie ſię z wyżſzego opiſu że potęga iakieykolwiek funkcyi lub ilości nic innego nie ieſt, tylko mnogość wypadaiącá z powtarzanego teyże funkcyi lub ilości przez ſiebie mnożeniá: oznaczá oná ſię przez wykładnika nad ilością lub funkcyą położonego; tak, że ieżeli ilość lub funkcyá iaka wchodzi dwa razy w mnożenie; wykładnik 2 oznácza iey potęgę drugą n.p. x^2 - - $(x+a)^2$; ieżeli trzy razy, wykładnik 3 znaczy potęgę trzecią, n. p. x^3 - - $(x+a)^3$; ieżeli n razy, n.p. x^n - - $(x+a)^n$, wykładnik n oznacza iey potęgę iakąkolwiek n. S czego oczywiście ſię wnosi: że ponieważ liczby naturalne oznáczáią wielością iedności w ſobie zawartych pewne potęgi; chcąc ilości iakie ſamotne cáłkie lub łomane wynoſić do iakieykolwiek potęgi, nie potrzeba nám tylko przez wykładnika tey potęgi rozmnożyć wykładnika ſamey ilości, a nowy wykładnik s tey mnogości powſtaiący położony nad ilością, wydá potęgę któreyśmy ſzukali: chcąc n.p. x, albo $\frac{x^2}{a^2}$, wynieść do potęgi czwártey którey wykładnik ieſt 4, wypadá mi z reguły poprzedzaiącey - - x^4 - $\frac{x^{2 \cdot 4}}{a^{2 \cdot 4}} = \frac{x^8}{a^8}$ potęga czwártá ilości podanych. Iako więc mnożenie ilości odbywá ſię przez dodáwanie; tak wynoſzenie ich do potęg, przez mnożenie wykładników. To ſamo prawidło rościąga ſię do wſzyſtkich iakimkolwiek ſpoſobem zawikłanych funkcyi n. p. $(x+a)^2$ - $(x+a+b+c+)^2$. i t. d. ale w tym oſtatnim przypádku wykładniki znaczą tylko działanie, które zachodzi. Przyſtąpmy teráz do wykonywaniá onego.

Wziąwſzy funkcyą złożoną z dwóch terminow $x+a$, rozmnożmy ią ſamę przez ſię, otrzymámy $(x+a)(x+a)$

$=x^2+$

$=x^2+2ax+a^2$. Ten wypádek odkrywá nám tę práwdę o częściach wchodzących w drugą potęgę, funkcyi DWU-WYRAZOWEY (*binomium*): że káżdá tákowá potęga zamyká w sobie potęgę drugą pierwszégo terminu x, to iest x^2; potęgę znowu drugą drugiégo terminu a, czyli a^2; i dwie mnogości z pierwszégo terminu przez drugi $2ax$: ta práwda o częściach potęgi drugiéy powstaiącey z funkcyi dwuwyrazowéy służyć nám może do wynoszenia funkcyi z więcéy wyrazów złożonéy, n.p. $x+a+b$, wziąwszy bowiem dwa terminy $x+a$ za ieden, mámy podług wyższégo twierdzenia - - - $(x+a+b)^2=(x+a)^2+2(x+a)b+b^2$, a włożywszy wártość $(x+a)^2$, i wykonáwszy mnożenie z $2(x+a)b$, otrzymámy $x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2$; maiąc cztéry terminy w funkcyi $x+a+b+c$, możemy wziąć trzy pierwsze za ieden, a stósuiąc zawsze do niégo twierdzenie wyżey wyłożoné, wypadnie: $(x+a+b+c)^2=(x+a+b)^2+2(x+a+b)c+c^2$, gdzie kładąc za $(x+a+b)^2$, wyżéy znalezioną wártość, i wykonywaiąc w drugim terminie mnożenie, przyidziémy do - - $x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2+2cx+2ac+2bc+c^2=(x+a+b+c)^2$. Tén sám sposób zachowuiąc w funkcyi z ilékolwiek bądź terminów złożonéy, przerobiémy ią na funkcyą dwuwyrazową, a maiąc wzgląd na częśći, któré istotnie wchodzić powinny w skład funkcyi dwuwyrazowéy; potrafiémy wyrazić natychmiast drugą potęgę funkcyi złożonéy nawet z nieskończonéy liczby terminów: i tak ieżeli dobrze rozważémy prawo zachodzącé w układzie drugiéy potęgi tych funkcyi, któré nám dopiero służyły za przykład; postrzeżémy że n. p. $(x+a+b+c+d+e+f+g+$ i t. d.$)^2=x^2+2ax+a^2+2bx+2ba+b^2+2cx+2ca+2bc+c^2+2dx+2ad+2bd+2cd+d^2+2xe+2ae+2be+2ce+2de+e^2+2fx+2fa+2fb+2fc+2fd+2fe+f^2+$ i t. d. to iest:

Tłomaczy się skład potęgi drugiey, i sposób wynoszenia do niéy funkcyi wielowyrazowych.

iest: wynioślszy pierwszy nasamprzód termin do potęgi drugiéy, ten który po nim następuie należy rozmnożyć przez 2 i przez poprzedzaiący, potém zrobić z niego potęgę drugą: i tak idąc do innych, każdego należy rozmnożyć przez 2 i poiedyńczo przez wszystkie poprzedzaiące, a stanąwszy na tym rozmnożonym przez 2, wynieść go samego do potęgi drugiéy: tym sposobém postępuiąc, potrafiémy funkcyi iakiéykolwiek wyrazić natychmiast potęgę drugą.

Wzór ogólny Zrównań i funkcyi drugiéy potęgi.

Dopiéro wyłożone prawo służy nam do rozeznania czyli funkcya iaka iest zupełną potęgą drugą, i do oddzielenia w funkcyi iakiéykolwiek tych terminow które w ródzáy drugiéy potęgi wchodzą, od tych które iéy są obcé i dorzucone. Co się tyczé uwagi nad samą ilością nieznaną, z ostatniego przykładu widziémy, że ieżeli ilość takowa wchodzi w funkcyą iaką wyniesioną do drugiéy potęgi, ta znayduie się raz samotną w drugiéy potędze, drugi raz rozmnożoną przez wszystkie terminy podwoione, to iest: $x^2+2(a+b+c+d+e+f+g+$ i t.d.$)x$, toż samo służy i wszystkim innym. Przeto ponieważ mnożnika $2(a+b+c+d+e+f+g+$ i t.d.$)$ z samych ilości znanych, wyrazić możémy przez iednę ilość znaną n.p. A; w każdéy funkcyi zamykaiącéy iednę nieznaną ilość i wyniesionéy do potęgi drugiéy, terminy z tą nieznaną ilością przywodzą się do tego wyrazu x^2+Ax, wszystkie zaś inné będą znané które znowu wyraziwszy przez D, wzór x^2+Ax+D wystawia nam funkcyą iakakolwiek drugiéy potęgi z iedną ilością nieznaną i innémi znanémi bądź należącémi do téy potęgi bądź obcémi: tak iako $x^2+Ax+D=0$ pokazuie wszystkie Zrównania zamykaiące funkcyą drugiéy potęgi z iedną ilością nieznaną. Zachowáymy sobie tę uwagę w pamięci.

§. XII.

Ieżeli mnożenie funkcyi iakiéy saméy przez się powtarzać będziémy kilkokrotnie, rodzą się ztąd różné potęgi wyższé téy funkcyi. Gdyby więc można z

wielu

wielu przykładów doſtrzec prawa, ktore zachowuie funkcya wynieſiona do potęgi iakieykolwiek, moglibyśmy podadź wzór ogólny wyrażaiący to prawo; który ſłużąc na iakąkolwiek potęgę, oſzczędziłby nam pracy przywiązaney do kilkokrotnie powtarzanego mnożenia. Poprzedzaiący §. powinien nam był podadź myśl tego dociekania. Weźmy ſobie więc dwuwyrazową funkcyą $x \pm a$, i mnożąc ią dwa, trzy, cztery, i więcey razy ſamę przez ſię, przyidziemy do różnych potęg zawartych w naſtępuiącey Tablicy: Skład i własności wyższych iakichkolwiek potęg.

I. $x \pm a$

II. $x^2 \pm 2ax + a^2$

III. $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm x^3$

IV. $x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4$

V. $x^5 \pm 5ax^4 + 10a^2x^3 \pm 10a^3x^2 + 5a^4x \pm a^5$

i t. d.

te wſzyſtkie potęgi dobrze roſtrząśnione i ſtóſowane między ſobą co do ilości, wykładników, wſpoł-czynników i znaków; daią nam oczywiście widzieć

Naprzód: że liczba terminów każdey potęgi przewyżſza iednością ſwego wykładnika; potęga więc m zamykać będzie $m+1$ terminów. Nazwawſzy pierwſzą potęgę z którey ſię rodzą inne, PIERWIASTKIEM; widzemy

Powtóre: że pierwſzy termin iakieykolwiek potęgi, ieſt pierwſzy termin pierwiaſtku ſamotny z wykładnikiem tey potędze właściwym, który w naſtępuiących terminach zmnieyſza ſię zawſze iednością póki w oſtatnim nie zniknie; wykładnik zaś drugiego terminu pierwiaſtkowego rośnie tyle, ile ſię pierwſzy zmnieyſza, poki doſzedłſzy naywyżſzey liczby nie zakończy ſamotnym ſwym terminem potęgi tak, iak ią pierwſzy zaczął. W potędze więc m, co do wykładników zachodzić będzie taki porządek:

$$x^m,\ x^{m-1}a,\ x^{m-2}a^2,\ x^{m-3}a^3, +\ \text{i t. d.}\ a^m$$

Potrzecie: ieżeli znaki pierwiáſtku ſą obydwa dodatné, wſzyſtkié terminy będą dodatnémi; ieżeli zaś obydwa odiemné, wſzyſtkié potęgi wykładników parzyſtych będą dodatné, wſzyſtkié zaś nieparzyſté będą odiemné; ieżeli nakoniec ieden termin pierwiáſtku ieſt dodatnym a drugi odiemnym; znaki w potęgach idą na przemian, tak że wſzyſtkie terminy w porządku parzyſtym ſą odiemné; wſzyſtkié zaś inné w porządku nieparzyſtym ſą dodatne.

Poczwarte: Co do wſpoł-czynników prawo zdaie ſię bydź zawikłane: uważaiąc ich atoli pilnie, znaydziémy: że każdy wſpółczynnik drugiégo terminu ieſt równy wykładnikowi potęgi, w innych zaś równá ſię mnogości z wſpółczynnika przez wykładnika x w terminie poprzedzaiącym, rozdzielonému przez liczbę porządku, który tenże termin poprzédzaiący zaſtępuie w potędze: i tak trzeci termin potęgi piątéy $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$; toż ſamo mowić o innych. S tych wſzyſtkich uwág wypádá że potęga m funkcyi dwu-wyrazowéy $x \pm a$ tak ſię układa:

$$(x \pm a)^m = x^m \pm m x^{m-1} a + \frac{m(m-1)}{1.2.} x^{m-2} a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot$$

$$x^{m-3} a^3 \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.} x^{m-4} a^4 + \text{ i t. d. } \pm a^m$$

w oſtatnim terminie znak wyżſzy należéć będzie do liczby m parzyſtéy, niżſzy zaś kiedy za m weźmiémy liczbę nie párzyſtą.

Ten wzór ſłużący nám na wynoſzenie funkcyi dwuwyrązowéy do iakiéykolwiek potęgi, ieſt znany pod imieniém *wzoru Newtona*, który go naſámprzód odkrył. Wyciągnęliśmy go s proſtéy obſerwacyi i analogii między potęgami doſtrzeżonéy: co nie może mieć mocy dowodu matematycznego, któręgo ſzukać należy w początkach ogólnych do natury funkcyi przywiązanych. Zoſtanie nám ſię ten dowód do dalſzych wiadomości, gdzie nám ſię pokaże zwiazek teraźniéyſzych

ważnieyszych uwág z ogólnieyszémi prawdami i użycie wzoru Newtona daleko rozlegleysze. Gdyby funkcya pierwiástkowá zamykała więcéy terminów; moglibyśmy ich dwa, trzy, i więcéy brać za iedén, tak iak w §. XI, tych potém różné znakowane potęgi podług táblicy na swé terminy rozebráwszy; i podłożywszy przyzwoicie ilości porządkowéy, przyszlibyśmy do wyrażeniá potęgi iakieykolwiek m, funkcyi Kilko-wyrazowey (*Polynomium*). Trzebaby nám ieszcze sposób tén posunąć aż do funkcyi złożonéy z nieskończonéy liczby terminów, ilé że takowy rachunek w wyższych częściach Matematyki barzo się często nadárzá, ale żebyśmy nie rozwlekli nadto ciągu naszych myśli, odkładámy to sobie na inné mieysce. Nie możémy tu iednak opuścić iednéy wáżnéy uwági, która nám pokazuie piękną własność funkcyi iakieykolwiek wyniesionéy do potęgi m: záleży oná na tém, iż rozebráwszy $(a+x)^m$ na swé terminy, i każdému z nich podłożywszy liczbę z postępu Arytmetycznégo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, i t. d. ieżeli każdy termin rozmnożémy przez liczbę mu podłożoną, i mnogości té dodámy razém, wypadnie $mx(a+x)^{m-1}$, to ieſt: potęga zniży się o ieden stopień, ale będzie rozmnożoná przez ilość nieznaną i swégo dawnégo wykładnika. Zobaczmy to w rachunku: $(a+x)^m$ - -

$$=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3 \text{ i t.d.}$$

0, 1, 2, 3, i t.d.

$$\text{Mnog: } mx\left(a^{m-1}+(m-1)a^{m-2}x+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}a^{m-3}x^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}a^{m-4}x^3+ \text{ i t.d.}\right)=mx(a+x)^{m-1}.$$

skąd wypáda, że ieżeli potęgi iakieykolwiek $(a+x)^m$ terminy mnożyć będziémy przez terminy postępu Arytmetycznégo. $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$, $6k$, i t. d. otrzymámy $mkx(a+x)^{m-1}$ gdyż takim sposobém

mnożémy naprzód terminy przez $o, 1, 2, 3, 4, 5,$ i t.d. s kąd wyniká $mx(a+x)^{m-1}$, powtóre przez k, s kąd znowu wyniknąć powinno $kmx(a+x)^{m-1}$. Ieżeli potęga m będzie mnożoná przez iakąkolwiek funkcyą N, to ieſt $N(a+x)^m$; rozmnożywſzy potém iéy terminy przez $ok, k, 2k, 3k,$ i t. d. otrzymámy na mnogość $Nmkx(a+x)^{m-1}$; położmy więc $Nmkx=A$, $m-1=n$ będzie $A(a+x)^n$, któréy znowu terminy mnożąc przez poſtęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k,$ i t. d. otrzymámy mnógość $Ankx(a+x)^{n-1}=m(m-1)Nk^2x^2\times(a+x)^{m-2}$: nazwawſzy $m(m-1)Nk^2x^2=B, m-2=p$, będzie $B(a+x)^p$, a mnożąc znowu przez poſtęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k,$ i t.d. otrzymámy mnogość $Bpkx(a+x)^{p-1}=m(m-1)(m-2)Nk^3x^3(a+x)^{m-3}$ tén znowu mnożąc przez $ok, k, 2k, 3k,$ i t. d. wypadnie nám $m(m-1)(m-2)(m-3)Nk^4x^4(a+x)^{m-4}$, i ogólnie mowiąc: $m(m-1)(m-2)(m-3)$ - - - $(m-[n-1])Nk^nx^n(a+x)^{m-n}$, ieżeli n razy terminy takowéy potęgi mnożyć będziémy przez poſtęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k,$ i t.d. Uczyniwſzy $N=1$, widziemy w oſtatnim wzorze tę ogólną prawdę: że chcąc funkcyą iakąkolwiek wynieſioną do potęgi m, zniżyć o tylé ſtopni ilé nám ſię podoba, potrzeba ią naſtępnie mnożyć tylé razy przez poſtęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k,$ i t.d. ſpoſobém dopieró wyłożonym, ilé iedności zamyka liczba wyrázaiąca zniżenie. W tém atoli zniżeniu zawſze nieznana iłość wchodzi za mnożnika z wykładnikiém tym, który nám zniżenie pokazuie, a zatém zniżenie to potęgi nie zniża zrównaniá, w którém takowa potęga z innémi funkcyami zachodzi.

§. XIII.

Odbywſzy ſpoſób wynoſzeniá funkcyi do iakichkolwiek potęg, zoſtaie nám ieſzcze wynaleśdź inny wywrotny, za pomocą którégo moglibyśmy od potęg przyiśdź do ſamych funkcyi, z którey potęga iaka powſtała.

wſtała. Takową funkcyą nazwaliśmy Pierwiastkiem Potęgi (*Radix Potentiae*), i ſzukanie funkcyi któráby powtárzaném mnożeniém wydadź mogła potęgę daną nazwiémy Wyciąganiem Pierwiastków (*Extractio Radicum*). A iako na cechowanie każdégo zachodzącégo działániá ſtanowiliśmy znaki oſtrzegaiącé nás o gatunku roboty, tak na znaczenie piérwiaſtków użyiémy cech $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[m]{\ }$; liczby w otworzyſtości tych znaków położoné ſą wykładniki potęg, których piérwiáſtku ſzukámy; i tak n.p. $\sqrt[3]{(a^3+b^3)}$ znaczy piérwiáſtek trzeciéy potęgi do wyciągániá z funkcyi między náwiaſami zawartéy, a ponieważ potęga drugá ieſt náyniżſza z potęg, w których wyciąganie piérwiáſtków zachodzi, dlá tego znak iéy piſać będziémy bez żádnégo wykładnika i tak $\sqrt{x}$ znaczyć będzie piérwiáſtek potęgi drugiéy z x.

Mówiąc o potęgach iedno-wyrazowych doſtrzegliśmy że w działániu ich náleży nám wykładnika ilości mnożyć przez wykładnika potęgi, więc w działániu przeciwném, iąkiém ieſt teraźniéyſzé, potrzeba nám wykładnika ilości dzielić przez wykładnika potęgi któréy ſzukámy piérwiáſtku, a wieloraz s tégo podziału będzie wykładnikiém piérwiáſtku ſzukanégo. Chcąc n.p. wynaleśdź piérwiáſtek *drugiey* potęgi ilości - - x^2, x^3, x^4, x^5, i t. d. dzieląc każdégo wykładnika przez 2, wypádaią piérwiáſtki - - - - x, $x^{\frac{3}{2}}$, x^2, $x^{\frac{5}{2}}$, któré ſię równaia tym wyrazom $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^4}$, $\sqrt{x^5}$, s czégo wypádaią naſtępuiacé práwdy.

Naprzód. Ze wſzyſtkié ilości i funkcye z wykładnikami łomanémi ſą Pierwiastkowe (*Radicales*) tak; że licznik ułomku ieſt wykładnikiém ilości lub funkcyi, mianownik zaś wykładnikiém znaku piérwiaſtkowégo; wſzyſtkié więc funkcye piérwiáſtkowé możémy albo przez znaki albo przez wykładniki ułomkowé wyrážać, i tak $(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$, albo $\sqrt[3]{(a^3+b^3)}$

 to ſamo

to ſamo znaczy. Ilości zaś lub funkcye z wykładnikami odiemnemi ponieważ ſą równe iedności rozdzielonéy przez tęż ilość lub funkcyą §. 3. przeto wyrazy $x^{-\frac{3}{2}}, y^{-\frac{m}{n}}$ i t.d. iedno znaczą co - - - -

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{y^{\frac{m}{n}}}, \text{ albo } \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{\sqrt[n]{y^m}}$$

Powtóre: Ieżeli w ilości lub funkcyi iakiéy znayduie ſię mnożnik którego wykładnik rozdzielić ſię zupełnie może przez wykładnika znaku pierwiaſtkowego, takowy mnożnik może bydź wydobyty s pod znaku, i na ten czas funkcyá ſkładać ſię będzie z ilości pierwiaſtkowych, i z ilości bez znaku, które nazwiemy WYMIERNEMI (*rationales*) n. p. - -

$\sqrt{4x^2a^3} = 2x\sqrt{a^3} = 2ax\sqrt{a}$ - - - $\sqrt[3]{8a^3(b+x)} = 2a\sqrt[3]{(b+x)}$. i t. d. tym ſpoſobem wydobywaiąc ilość s pod znaku uproſzczamy funkcyą: gdyby nam znowu przeciwnie potrzeba było funkcyą przywieśdź do iednoſtaynego wyrazu, to ieſt ilości wſzyſtkie wymierne podciągnąć pod znak pierwiaſtkowy nienaruſzywſzy ich wartości, każdy oczywiście widzi, iż w ten czas potrzeba wynieść funkcye wymierne do téy potęgi którą oznacza pierwiaſtek. Chcémy n. p. w funkcyi $3x(a+b)\sqrt{(y^3+c)}$ podciągnąć wſzyſtkie ilości pod znak piewiaſtkowy, otrzymamy: $\sqrt{(9x^2[a+b]^2[y^3+c])}$. który wyraz to ſamo znaczy co i przeſzły. Te wſzyſtkie ſpoſoby przerabiania funkcyi wyciągnione s proſtych barzo uwag nad naturą pierwiaſtków będą nam barzo częſto pomocne, trzeba żebyśmy ſię w nie dobrze wprawili, aby ſobie oſzczędzić trudności na które napadamy w rachunku.

Nauczyliśmy ſię iuż znaczyć, i czytać znaczenia pierwiaſtkowych funkcyi; zoſtaie nam teraz wynaleśdź prawidła ſłużyć mogące do wyciągania pierwiaſtków s funkcyi iakimkolwiek ſpoſobem zawikłanych.

nych. Té że bydź mogą albo zupełnémi potęgami albo też niezupełnémi; w piérwszym razie powinniśmy przyiśdź przez pewné prawidła do ich piérwiástku wymiernégo: w drugim zaś przypádku znaleśdź możémy piérwszé piérwiastku términy ale reszta zostanie się pod znakiém, tak iak doświadczyliśmy w dzieleniu: i takowé funkcye nazywaią się NIEWYMIERNEMI (*Irrationales*), ilé więc razy będziémy mieć do czynieniá s funkcyą lub zrównaniém potęgi niezupełnéy przestaniémy w działaniu na naznaczeniu tego piérwiastku, który do wyciąganiá zachodzi i tak n. p. maiąc zrównanie $x^m = a$, a chcąc znaleśdź wartość téy nieznanéy, wyrażémy ią $x = \sqrt[m]{a}$. Tén ostatni rodzáy rachunku o potęgach niezupełnych zostawiémy sobie na potém, zatrzymáymy się tylko teráz nad piérwszym.

Pamiętámy o uwádze wyżéy uczynionéy, że w potęgę zupełną iakąkolwiek wchodzą prócz liczb, té samé ilości któré náleżą do piérwiástku, nie zostaie nám tylko té ilości wydobydź przez działaniá na to potrzebné. Nad to zaś nic łatwiéyszégo: wiémy náprzód że piérwszy termin potęgi iakiéykolwiek iest samotną potęgą piérwszego członka piérwiástku, więc go zaráz wydobędziémy przez dopiero podaną regułę na funkcyé iedno-wyrazowé, to iest dzieląc wykładnika ilości przez wykładnika piérwiástku, n. p. z funkcyi $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ chcąc wyciągnąć piérwiástek *3ciéy* potęgi mámy $x^{\frac{3}{3}}=x$ za piérwszy termin piérwiástku. Drugi termin potęgi zawierać będzie drugi członek piérwiástku rozmnożony przez funkcyą piérwszégo n.p. $3ax^2$, zamyká a, rozmnożoné przez $3x^2$, zrobiwszy tedy tę funkcyą, i rozdzieliwszy przez nię drugi termin, wynáydziémy drugi członek piérwiástku n. p. $\frac{3ax^2}{3x^2}=a$; tén potém kombinuiąc z piérwszym tąk ażeby wypadły té wszystkié terminy, ktorékol-

wiek powſtaią z dwóch tych członków pierwiáſtku w potędze; odciągniémy ich od ſiebie, i zniesiémy to, co té dwa términy pierwiáſtku wprowadziły w potęgę. Tym ſpoſobém daléy poſtępuiąc przyidziémy do wyciągnieniá pierwiáſtku z iakiéykolwiek potęgi zupełnéy. Przypatrzmy ſię z uwágą wzorowi działania.

Potęga 3cia. - - $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ Pierwiáſtek iéy

Działanie - - - $\sqrt[3]{x^3}$ x Piérwſzy człon:
Potęga z piérwi:
do odciągnieniá $-x^3$

Reſzta z potęgi - $3x^2a+3xa^2+a^3$.

Dzielnik z 1go człon:
ka piérwiáſtku $3x^2$ - - - $+a$ - 2gi członek.
Funk: obydwóch czł:
do zgładzeniá wſzy-
ſtkich terminów. - $-3x^2a-3a^2x-a^3$

$x+a$. } piérwiá-
Reſzta - - - 0 0 0. } ſtek cały

Tą ſamą drogą iśdź należy w iakichkolwiek potęgach niżſzych i wyżſzych, gdzie znowu widzémy, że ponieważ litery ſwoią ogólnością wyrażaią nam działaniá zachodzące w iakimkolwiek terminie, daią nám zaráz czytać reguły potrzebné na wydobycie pierwiáſtków s potęgi. Té reguły rosciągnąć możémy do wyciąganiá iakichkolwiek pierwiáſtków z liczb, używaiąc wzoru s tablicy wyżéy podanéy na potęgę któréy ſzukámy pierwiaſtku. Zadáymy ſobie n.p. do wyciągnieniá pierwiáſtek 3ciéy potęgi z liczby 34,965,783 (B) za pomocą wzoru - $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ (A)

Niżeli przyſtąpiémy do ſamégo działaniá, zbliżmy ſobie wſzyſtkie uwági z wyżſzych wiadomości powzięté, a potrzebné do teraźniéyſzéy roboty.

Náprzod: wiémy s ſamégo przypatrzeniá ſię że wzór (A) nie zamyká tylko dwa członki pierwiáſtku $x+a$, więc nám także pierwiáſtek liczebny rozdzielić potrzeba na dwie części, s których iedna odpowiadałaby x, drugá záś a; to otrzymamy dzieląc liczbę

liczbę pierwiastku na dziesiątki odpowiadaiące x, i na iedności odpowiadaiące a; a ponieważ sta, tysiące, i t.d. dzielić się mogą na dziesiątki, więc gdyby nawet pierwiastek liczebny zamykał w sobie sta, tysiące i t. d. wszystkie te razem weźmiemy za pierwszy członek i wyrażemy przez x w dalszych działaniach, abyśmy pierwiastek na dwie tylko części rozdzielony uważali.

Powtóre: potrzeba nam w potędze liczebney (*B*) oddzielić te dwie części. Ponieważ $x=10$; $x^3=1000$; w działaniach zaś Arytmetycznych gdzie mnożenie odbywa się od prawey na lewą stronę, i gdzie dziesiątki powstaią z mnożenia iedności, naypierwszy wzgląd obrócić powinniśmy na iedności aby im oddzielić tyle figur, ile ich zawierać może potęga trzecia naywiększey iedności iaką iest 9. Dzielę więc kreską od prawey na lewą stronę podaną liczbę (*B*) na rzędy, naznaczaiąc każdemu trzy figury. Działanie które mamy teraz tłomaczyć widzieć możemy na tablicy tu przyłączoney.

Pierwszy rząd 34 odpowiada x^3 w wzorze (*A*): szukam więc liczby, którey by trzecia potęga albo wyrównała, albo przynaymniey nayblisza była 34; taką iest 3, która będąc pierwszym członkiem pierwiastku, nazywam ią x; wynoszę potym $x=3$, do potęgi trzeciey i mam 27, które odciągnąwszy od 34, zostaie mi się 7: do tey reszty znoszę rząd następuiący 965.

Uważam liczbę 7965 iako zawieraiącą inne terminy wzoru (*A*) to iest: $3x^2a+3xa^2+a^3$; żebym wyciągnął a drugi członek pierwiastku; dzielę pomienioną liczbę przez $3x^2$ to iest przez $3.9=27$, a ponieważ x znaczy dziesiątki, więc x^2 znaczy sta, podpisuię więc dzielnika 27 tak, aby iego ostatnia figura przypadła pod sta liczby podzielney; zapełniam potem resztę mieysc próżnych przez zero; a wykonawszy dzielenie otrzymam 2 na drugi członek pierwiastku, który nazywam a; przez a mnożę dzielnika i otrzymam $3x^2a$; robię potem inne terminy $3xa^2$, a^3, i te razem dodawszy odciągam od 7965. Zo-

Zoſtaie mi reſzta 2197, do któréy znioſſzy oſtatni rząd 783 biorę obydwie części pierwiaſtku 32 za iedén, który nazywám x. Uważám znowu liczbę 2197783, iako zamykaiącą terminy $3x^2a+3xa^2+a^3$; żebym z niéy wyciągnął a, dzielę ią przez $3x^2=3$. $(32)^2=3072$, podpiſuię tego dzielnika tak iak i przedtém, i z dzieleniá otrzymám 7, za nowy członek pierwiáſtku który nazywám a, przez ten mnożąc $3x^2=3072$, i potém robiąc inné terminy $3xa^2+a^3$ dodaię ié razém, s których ſummy powſtaie liczba nie zoſtawuiącá żádnéy reſzty. Gdyby ieſzcze liczba (B) zamykała więcéy rzędów, zawſzebyśmy po każdém odciąganiu wſzyſtkié członki pierwiáſtku brali za iedén, i nazywali ié x, a ſzukaiąc nowégo a poſtępowalibyśmy ſobie tak iak teráz.

Tén ſám ſpoſób ſłużyé nám może do wyciąganiá iakichkolwiek pierwiáſtków z liczb, używaiąc zawſze wzoru przyzwoitégo. I tak ſzukaiąc pierwiáſtku potęgi m, dzielić potrzeba na rzędy s prawéy ſtrony na lewą, i każdému dać m figur. z náypierwſzégo rzędu po lewéy ſtronie wyciągnąć pierwiáſtek x potęgi m, a wynioſſzy go znowu do téy ſaméy potęgi odciągnąć od rzędu; znieść potém do reſzty naſtępuiący rząd, rozdzielić go przez mx^{m-1} podſunąwſzy dzielnika o $m-1$ figur daléy od prawéy ſtrony: za pomocą dzieleniá wynaydzie ſię a, któré z x kombinowané przyzwoicie dá wſzyſtkié terminy wzoru Algebraicznégo, których ſummę odciągnąć należy od liczby podzielnéy. Tym ſpoſobém n.p. za pomocą wzoru

$x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$ wyciągniémy z liczby 3802,04032 piewiáſtek 5téy potęgi $=52$.

Tu náywięcéy powinniśmy uczuć korzyści, którą z ogólnych znaków Algebraicznych zbierámy. *Náprzód* wyciągámy reguły na działaniá nigdy niedoſtępné Arytmetyce, z náygruntowniéyſzémi onychże dowodami. *Powtóre:* przywyknąwſzy ráz do tego używaniá

wzorów

wzorów nigdy tych reguł nie możémy zapomniéć; albo zapomniáwszy, w iednym momencie możémy ié sobie przywieśdź na pamięć. Nie tylko więc drogi wynalázku i przekonaniá dlá rozumu, alé i dlá pamięci wielka folga ieſt w ogólności znaków ukrytá.

§. XIV.

Rozwięzuie ſię Zrównanie 2go ſtopnia.

Nie zapomniéymy o tém że w té wszyſtkié działaniá dotąd rostrząsané byliśmy wciągnieni przez uwágę nad zrównaniami przywiedzionémi na początku tego rozdziału. Widzieliśmy tam, że wszyſtkié sposoby w Rozd: I. wyłożoné, nie pomogą nám do rozwiązaniá zrównáń $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$, - - $bx^3+(c+bd+b)x^2+(cd+c+bd)x+cd+c=d$, i innych, w których x wyniesioné było do potęg wyższych; trzeba nám więc użyć tych práw nowo odkrytych w naturze potęg i piérwiáſtków do rozwiązaniá teraźniéyszych zrównáń, czyli do wynalezieniá x w funkcyi ilości znanych. Weźmy z nich piérwszé $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$ czyli $x^2+\frac{c+b^2}{b}x+c-\frac{a}{b}=o$, ponieważ w niém x znayduie ſię wyniesionem do drugiéy potęgi, uważać możémy całé zrównanie iako potęgę drugą z niewiadoméy x, i s pewnéy funkcyi ilości wiadomych: ta więc zawartá ieſt w wzorze powszechnym $x^2+Ax+D=o$ w którémeśmy pod §. XI. chcieli ogarnąć wszyſtkié iakiékolwiek zrównaniá zawieraiącé niewiadomą x w drugiéy potędze. Znosząc zaś ogólné zrównanie z podaném, wypadá $A=\frac{c+b^2}{b}$; $D=b-\frac{a}{b}$

Ponieważ potęgi w zrównaniu ogólném zawartéy częścią piérwiáſtku ieſt x, gdybyśmy mogli przyiśdź do znalezieniá dokładnégo piérwiáſtku zrównaniá - - $x^2+Ax+D=o$ przyszlibyśmy do zrównaniá takiégo, iakiéśmy w Rozd: I. rozwiązali, a zatém do wártości ilości nieznanéy.

Wiémy

Wiémy z dopiéro odbytych działań że piérwiáſtek iakiéykolwiek potęgi nie może bydź dokładnie wyciągniony, tylko kiedy ta potęga ieſt zupełna; potęga zaś druga do ſwoiéy pełności potrzebuie podług wyżſzych początków takiégo wyrazu $x^2 \pm 2ax+a^2$; nie możémyż zrównaniá naſzégo tak przyſpoſobić aby ieden iego członek zawieraiący x, miał té wſzyſtkié części do zupełnéy potęgi potrzebné? Przekonywá nás o tém podobieńſtwie ſamo lekkie zaſtanowienie ſię nad naturą zrównaniá, w ktorém można bez naruſzeniá związku cokolwiek chcémy, działać, byleby té działaniá z obydwóch ſtron zrównaniá zachodziły. Przenieśmy więc naprzod wſzyſtkié terminy znané z drugiéy ſtrony zrównaniá i otrzymámy - - - -
$x^2+Ax=-D$ - - (A). dopełniymy teraz cokolwiek brakuie piérwſzému członkowi do drugiéy potęgi, to ieſt dodáymy z obydwoch ſtron $\frac{A^2}{4}$ a wypadnie - -
$x^2+Ax+\frac{A^2}{4}=\frac{1}{4}A^2-D$; zrównanie którégo piérwſzy członek ieſt zupełną potęgą drugą; wyciągnąwſzy więc piérwiáſtek z obydwóch ſtron otrzymamy
$x+\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-D\right)}$, aże potęga drugá 1go członka zrównaniá powſtać mogła albo z obydwóch terminów dodatnych albo z obydwóch odiemnych §. 12; zachodzi trudność, czyli piérwiáſtkowi obydwa té znaki ſłużyć powinny, czyli tylko ieden i który? Na ułatwienie iéy wróćmy ſię do náypiérwſzych początków, które nás przywiodły do teraźniéyſzégo gatunku zrównań. Wyciagliśmy ié z innych maiących w ſobie ilości niewiadomé rozmnożoné przez inné niewiadomé, które lubo były funkcya iednéy, zawiſły iednak od różnych między ſobą związków; té związki ſłużyły nám na wyrażenie wſzyſtkich innych niewiadomych przez iednę, i przyprowadziły nás do zrównań zawieraiących rożné potęgi téyże iednéy niewiadoméy.

wiadomey. To więc ostatnie zrównanie stało się składem tylu związków, ile było nieznanych ilości, a zatém rozwiązanie iego odkryć nám ie wszystkie powinno: że zaś podług liczby niewiadomych rozmnożonych przez siebie rosty rożne potęgi w zrównániu, tak że dwie niewiadome ilości przywiodły nas do zrównaniá zamykaiącego x^2; trzy niewiadome do zrównaniá zawieraiącego x^3; iedném słowém ieżeli w zrównaniu znaydowałoby się m ilości nieznanych rozmnożonych przez się, byleby wszystkie były funkcyą x, wypadnie po wyrzuceniu ich x^m: aże każdéy wártości służyć powinno inne znaczenie, to iest inna odpowiedź na pytanie; zaczém żadne pytanie nie może nás przywieśdź do zrównaniá rożnych potęg tylko to, które má wiele odpowiedzi, tak że od liczby odpowiedzi przywiązanych do pytaniá zawisła wielkość potęgi ilości niewiadoméy czyli to co nazywaią Wymiar albo Stopien Zrównania, i przeciwnie od stopnia zrównaniá na któryśmy natrafili, zawisła koniecznie liczba odpowiedzi temu pytaniu służących. Nazwali bowiem Geometrowie zrównanie *drugiégo*, *trzeciégo*, *czwartégo*, *mgo* stopnia, w ktorém niewiadomá znayduie się wyniesioną do *drugiey*, *trzeciéy*, *czwartéy*, *mtey* potęgi, tak że wykładnik náywyższy ilości nieznanéy iest razém skazówką stopnia zrównaniá.

Té tak oczywiste rachunku wypádki rzucaią wielkie światło w metafizykę naszégo myśleniá. Uczą nás bowiem że iedno pytanie wiązac się może z wielu barzo innémi, które od téy saméy kombinacyi myśli zawisły; albo że wiele bydź może razém rzeczy którym té same służą własności w warunkach pytaniá zawarte. Prawda: że myśląc o iedném pytaniu nie przyidzie nám prawie nigdy na myśl żeby się z niém inne wiazały; ale to wszystko pochodzi z barzo ciasnych granic naszégo poięcia, i z barzo szczególnégo poznawaniá rzeczy. Gdybyśmy atoli mieli wiadomą w całéy obszerności Metafizykę naszych myśli, rozum

E náfz

nafz ogarniałby rzeczy ogólniéy, i znalazłby fię w tych wfzyftkich zakrętach kombinacyi, w któré go koniecznie natura rzeczy wciąga, a których on przez niewiadomość początków myśleniá nie może rozróżnić. S tąd pokazuie fię wielki fzacunek rachunku Algebraicznego, który ogólnością fwych znaków ogarniá całą ogolnóść rzeczy i ieft náygruntowniéyfzym dowodem, że dofkonałość myśleniá zawifła od dofkonałości ięzyka. Nie będzie tu od rzeczy uczynić niektóré uwagi Loiczné które nám dopiéro wyłożony początek podaie.

Poniewáż od iednéy kombinacyi zawifnąć może wiele pytáń, w porównywaniu nafzych myśli trafić możémy na kilka wniofków od fiebie różnych, a wypádaiących oczywiście s téyże faméy kombinacyi; s tych wniofków ieden może rozwiązać nafzé zadanie podług doświadczeniá, a drugi z niém fię wcale nie zgádzać: cóż tego za przyczyna? oto kombinacyá nafza przywiązaná ieft do wielu pytáń mimo nafzę wiadomość, z którycheśmy tylko iedno mieli na myśli: aże wypádki kombinacyi dobrze zrobionéy fą konieczné, wyciągliśmy odpowiedzi na inné pytaniá związané z nafzém. Trzebaby nám fię więc cofnąć do pierwfzégo pytaniá, i poznać że ono ieft ogólniéyfzé, niżeliśmy fię fpodziewali, a wynioflfzy fię do téy ogólności odkrylibyśmy przypádki infzé zawarté w nafzéy kombinacyi, na któré flużą té wniofki, które fię z nafzém pytaniém i doświadczeniém nie kléią. Przytrafić fię nawet może że s kombinacyi iakiéy wyciągniémy wypádki doświadczeniu przeciwné, co może pochodzić s tąd, żeśmy odpowiedź iednégo pytaniá wzięli za odpowiedź drugiégo. Té wfzyftkié przeciwności pozorné póty nas nie przeftaną zadziwiać, i póty rozum nie wyidzie z dziecinności fwoich działáń; póki myślenie nafzé nie będzie miało tak ogólnych początków, iak fą ogólné związki między rzeczami. Tego zaś poftępu myśleniá nie można tylko od wzroftu Geometryi i od duchów prawdziwie Geometrycznych oczekiwać.

Wfzyftkié

Wſzyſtkié té rozumowaniá przekonywaią nás, że zrównanie 2go ſtopnia zamyká koniecznie dwa piérwiáſtki do dwóch znaków przywiązané $x=-\frac{1}{2}A+\surd(\frac{1}{4}A^2-D)$ - - $x=-\frac{1}{2}A-\surd(\frac{1}{4}A^2-D)$. które tyléż daią odpowiedzi na pytanie w niém zawarté. I dla tegoć to dwoiakiégo znaczeniá wſzyſtkié funkcye znaki piérwiáſtkowé drugiéy potęgi zawieraiące w iłościach nieznanych, nazywać będziémy DWÓ-KSZTAŁTNEMI (*Functiones biformes*). Obiaśniymy wſzyſtkié té práwdy w przykładzie:

Zadanie. „W pewnéy Prowincyi liczba mięſzkań„ców n urosła przez dwa łata do liczby d, powię„kſzaiąc ſię w iednéy corocznie proporcyi ſwoiéy lu„dności, wynaleść liczbę tego wzroſtu x, i ludność „po piérwſzym roku?„

Ieżeli w początku ludność była n, powiękſzaiąc ſię liczbą x piérwſzéy ludności, po pierwſzym roku było ludzi $n+nx$, po drugim roku $n+2nx+nx^2=d$, i tak idąc daléy, w trzecim roku będzie ludzi $n+3nx+3nx^2+nx^3=e$, w czwártym roku $n+4nx+6nx^2+4nx^3+nx^4=f$: idąc tak przez dalſzé lata trafiémy na zrównaniá wyżſzych ſtopni. Ale teráz nie zatrudniáymy ſię tylko drugim należącym do pytaniá i do naſzégo zamiaru. Liczba więc ludzi po dwóch łatach zawartá ieſt w zrównaniu 2go ſtopnia $n+2nx+nx^2=d$, które nám powinno odkryć wártość na x, Chcąc ié rozwiązać podług wyżéy wyłożonych reguł i znieść z zrównaniém ogólném (A) przywiedźmy ié

do wyrazu $x^2+2x=\frac{d-n}{n}$

równaiąc ié potém z (A) będziém mieli $A=2$, $D=-\frac{n-d}{n}$ a zatém $\frac{A^2}{4}=1$, więc:

$$x^2+2x+1=\frac{d-n}{n}+1 \text{ - - - - } x+1=\pm\surd\left(\frac{d-n}{n}+1\right)$$

$$x=-1\pm\surd\left(\frac{d-n}{n}+1\right)$$

Daymy teraz że liczba pierwiastkowey ludności $n=10.000$, liczba ludności po dwóch latach $d=90.000$; włożywszy te wartości w zrównanie, wypadnie $x=-1\pm\sqrt{9}$, to iest $x=2$, $x=-4$, pierwsza wartość na x należy do wzrostu ludności, i uczy nas, że do liczby każdego roku przybywała liczba ludzi roku poprzedzaiącego rozmnożona przez 2, było więc ludzi po pierwszym roku $10.000+20.000=30.000$, po drugim $30.000+60.000=90.000$.

Druga wartość na $x=-4$ będąc odiemną, należy podług wyższych wiadomości do odludnienia, to iest: że gdybyśmy byli chcieli rachować niszczeiącą corocznie ludność kraiu w iedney proporcyi, trafilibyśmy byli na to samo zrównanie, a zatem oba te pytania od iedney zawisły kombinacyi. Zeby więc po dwóch latach brakowało 90.000 mięszkańców; przypuściwszy że ich zaraz ubyło 10.000, potrzeba do tego, aby odludnienie w każdym następuiącym roku było cztery razy większe iak w pierwszym: brakować ich więc będzie w pierwszym roku 50.000, w drugim 90.000. Zeby więc liczbę zgasłego obywatela w równey liczbie lat, ludnością iednostayną nadgrodzić, trzeba żeby się miało zaludnienie do niszczenia iako 2 : 4.

§. XV.

Znaczenie i własności pierwiastków wroionych.

Wróćmy się teraz od przykładu do początków zostawionych. Ponieważ zrównanie $x^2+Ax+D=0$; i iego pierwiastki $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}$. wystawia nam zrównania drugiego stopnia; zawierać ono powinno w sobie wszystkie szczególne przypadki tychże zrównań i własności do nich przywiązane. Ieżeli więc uczyniemy w niem $A=0$ zostaie się zrównanie bez drugiego terminu $x^2=-D$, i iego pierwiastki $x=\pm\sqrt{-D}$. ieżeli więc D iest funkcyą odiemną; x^2 będzie dodatne, i zrównanie będzie zamykać obydwa pierwiastki równe, s których ieden dodatny, a drugi odiemny. Ieżeli zaś D iest dodatne, x^2 będzie odiemnem. Ale x^2 iest potęgą drugą x, która podług natury potęg parzystych zawsze bydź powinna doda-

tną

tną bądź ona powstaie s funkcyi dodátnéy, bądź z odiemnéy; wynaleśdź więc na x^2 wártość odiemną w zrównaniu, albo na x funkcyą pod znakiém pierwiástkowym odiemną, ieſt to wynaleśdź rzecz przeciwną całéy naturze funkcyi 2go ſtopnia; i dla téyci to przyczyny takowé pierwiástki odiemne pod znakami $\sqrt{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[8]{}$, i t. d. wzięły imie Uroionych (*Radices imaginariae*), które w oſtatnich wypádkach pokazuią nám niepodobieńſtwo tego, czégo ſzukámy, dla iakiéyś przeciwności, która ſię w pytanie mimo naſzę uwagę wmięſzała. Iakóż do przypádków ſzczególnych które ogarniá zrównanie, náleży zaiſte i tén, który to pytanie czyni niepodobném, i który przez oſtatnié wypádki powinien nám bydź wytknięty. A tak zrównanie każdé nie tylko nás prowadzi do prawdy, ale nám i wytyka błąd ieżeliśmy go popełnili. Mieliśmy tego iuż przykład w zrównaniach 1*go* ſtopnia pod §. 10.

Przypádki więc pierwiáſtków uroionych zawarté bydź koniecznie muſzą w zrównaniu ogólném - - $x^2+Ax+D=0$ - - $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}$ do których roſpoznaniá uważáć nám potrzeba wielkość funkcyi zoſtaiących pod znakiém pierwiáſtkowym. Dla ſkróceniá więc ięzyka, znak ($<$) ſłużyć nám będzie za znak wielkości, oznáczaiąc tę iłość, lub funkcyą większą, ku którey ieſt obrócona otwártość znaku, tę zaś mnieyſzą która ſię kładzie przy kończyſtości tegoż znaku n. p. $x<a$, pokazuie że x ieſt mnieyſzém od a, i że a ieſt większé od x.

Ponieważ funkcyá odiemná pod znakiem $\sqrt{}$ oznaczá pierwiáſtki uroioné, roſtrząśniymy, kiedy $\frac{1}{4}A^2-D$ bydź może odiemném lub dodatném. Pewni ieſteśmy z poprzedzaiących początków że $\frac{A^2}{4}$ muſi zawſze bydź dodatném, iakiékolwiek ieſt ſamo A; ieżeli D ieſt odiemném, odciąganiém ſtanie ſię dodatné,

więc koniecznie na ten czás $\frac{A^2}{4}$—D zawsze będzie dodatnem i zrównanie 2go stopnia nie má pierwiástków uroionych.

Ieżeli zaś D iest dodatnem, $\frac{1}{4}A^2$—D będzie tylko w ten czás odiemnem, kiedy $D>\frac{1}{4}A^2$, i zrównanie na ten czás má obydwa pierwiástki uroione. S tych dwóch tak prostych uwág ieszcze przed rozwiązaniem zrównaniá 2go stopnia, możemy poznać czyli ono zamyká pierwiástki rzetelne lub uroione. Te pierwiástki uroione nie wydałyby nám się aż w ostatnich wypádkach, gdybyśmy nie byli doszli dopiero wyłożonego sposobu na ich rospoznanie, może więc zrównanie pokázać się w postaci rzetelney a iednak zamykać coś niepodobnego. Coż tego za przyczyna? barzo prostá: w pytaniu zadanem może zachodzić przeciwność między iednym warunkiem i drugim względem iedney rzeczy, ale może zachodzić związek względem drugiey; uważáne te warunki w tym ostatnim przypádku prowadzą nás do zrównaniá prawdziwego; że zaś to zrównanie ogarniá wszystkie okoliczności, odkryie się dopiero w wypádku przeciwność, która względem czego zachodzi. Oprócz tego mogą warunki wiązać się s sobą dobrze w pytaniu, ale mogą nie bydź przywiązane tylko do pewnych wártości; ieżeli w nie wprowadzemy wártość która im nie służy, wprowadzemy rzecz niepodobną, i trafiemy na uroione pierwiástki. Zobáczmy to w przykładzie:

Zadanie. „Rozdzielić liczbę 18 na dwie tak, żeby „ich mnogość wydała 135„

Dáymy że iedna s tych liczb iest x, drugá więc będzie 18—x, i warunek pytaniá daie nám Zrównánie $x(18-x)=135$ · $18x-x^2=135$ · $x^2-18x=-135$; a zatem $x=9\pm\sqrt{(81-135)}=9\pm\sqrt{-54}$, pierwiástki dwa uroione. Pytanie więc nasze iest niepodobne w liczbie 18, ale bydź może podobne w inney liczbie.

Gdybyśmy

Gdybyśmy n. p. zamiaſt 18 wzięli byli 24, znaleźlibyśmy byli dwie liczby $x=9$; $x=15$, których mnogość równá ieſt 135 podług warunku pytaniá.

§ XVI.

Zoſtáwmy ſobie na potém przykłady i dalſzé obiáśnieniá naſzych początków, a ciągmy daléy naſzę uwágę. Przyſzliśmy byli do zrównaniá *2go* ſtopnia od zrównań zamykaiących w ſwych terminach mnogość z iednéy ilości nieznanéy przez drugą n. p. $xy+ay+b=o$, uważaiąc y iako funkcyą x daną przez inny związek *1go* ſtopnia. Takowé zrównanie ieſt zaiſte barzo ogólné *2go* ſtopnia, s którégo dopiéro wypadá $x^2+Ax+D=o$, ale że tamto podług podanych prawideł nie może bydź rozwiązané tylko przywiodłſzy ié do tego oſtatniégo wzoru. Iednakowóż wyráz iego tak przerobiony nic nie odmienia w iego naturze i związku, a zatém nie naruſzá żádnégo przymiotu iemu iſtotnégo. Ieżeli więc zrównanie $xy+ay+b=o$ uważané bydź powinno iáko złożoné z dwóch związków różnych lub iednakich, s których iedén ſłużý na x, drugi na y; i z dwóch wártości równych lub nierównych, ilosci nieznanych x, y; dwie té wártości nie mogły ſię złożyć razém w zrównaniu, tylko ták iak i ſamé nieznané, to ieſt mnożeniém iednéy przez drugą. Zrównanie więc $xy+ay+b=o$ uważané bydź powinno iak gdyby było złożoné z dwóch wártości zrównań *1go* ſtopnia przez ſiébie rozmnożonych. Więc i $x^2+Ax+D=o$ które ieſt zawarté w támtém podobnie bydź powinno uważané: té dwie wártości piérwſzégo ſtopnia wypádaią z rozwiązaniá tego zrównaniá i ſą oznaczoné w dwóch piérwiáſtkach, więc dwa piérwiáſtki zrównaniá $x^2+Ax+D=o$, to ieſt - -

$$x=-\tfrac{1}{2}A+\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-D)} \quad - - - \quad x=-\tfrac{1}{2}A-\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-D)}$$

przywiedzioné do zero i rozmnożoné przez ſię wydadź powinny ſamo zrównanie $x^2+Ax+D=o$.

Zrównanie 2go ſtopnia skłádá ſię z dwóch piérwſzégo ſtopnia.

Przywiedzeni więc ieſteśmy ták oczywiſtą uwágą do działáń w funkcyach piérwiáſtkowych rzetel-

nych lub uroionych. Zatrzymáymy ſię nad niémi.

Działania któreśmy roſtrząſali wyżéy w funkcyach wymiérnych zaſadzané były na piérwſzych właſnościach i na naturze ſamych funkcyi i ilości. Z różnych odmián wypádały różné ich gatunki, té atoli zawſze pokázały nám ſię uważaiąc iedno działanie ſpoſobém mniey lub więcéy rozległym i dzieląc ié niby na różné przypádki. Iakżeśmy wynaydowali prawidła na działanie iakié nowé? oto równaiąc to z inném iuż wiadomém, a podług odmián w tém porównaniu doſtrzeżonych, przerábialiśmy prawidła iédnégo działániá na prawidła drugiégo; to ieſt ſzliśmy zawſze od rzeczy wiadomych do niewiadomych i w ſzukaniu té oſtatnié ſtaraliśmy ſię zawſze przywieśdź do piérwſzych. Nie odſtąpmy więc i teráz od téy drogi i ſtaráymy ſię funkcye niewymiérné porównać z wymiernémi co do działáń w nich zachodzących. Nie możémy naſámprzód wątpić żeby działaniá w funkcyach teraźniéyſzych nie przypádały té ſamé, które ſłużyły funkcyom wymiernym. Té bowiem działania nie były ſkutkiém ich wymierności, ale wypádały z różnych odmián wzroſtu lub ubywaniá, którym podlega ilość podług natury i okoliczności pytaniá. Té odmiany zachodzić więc mogą w ilościach niewymiernych tak iak w wymiernych; nie zoſtaie nám teráz tylko prawidła tamtych przyzwoicie ſtóſować do teraźniéyſzych.

Dziáłaniá funkcyi niewymiernych.

Wſzyſtkié ilości niewymierné wyrazić ſię mogą na podobieńſtwo wymiernych przez wykładniki ułomkowé; przyſtóſowáwſzy więc to wſzyſtko cośmy mowili o obchodzeniu ſię z wykładnikami całkiémi, do ułomkowych, wynáydziémy to cośmy ſobie zadali. A naprzód iako różné litery i wykładniki w funkcyach wymiernych, oddzielały nám té funkcye nie dozwálaiąc ich dorzucać lub odciągać razém chyba przez ſamé tylko znaki, tak różné litery i wykładniki znaków piérwiáſtkowych w funkcyach niewymiernych tak oddzielaią ich gatunki, że ich s ſobą łączyć nie można tylko przez znaki n.p. maiąc $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$,

Dodáwanie i odciąganie.

albo

albo $\sqrt{-a}$, $\sqrt[3]{-3a}$, i t.d. mamy funkcye tak różné, że ich dodawanie lub odciąganie nie może się ſtać tylko przez naznaczenie, to ieſt: $\sqrt{a} \pm \sqrt{ab} - \sqrt{-a} \pm \sqrt[3]{-3a}$. Przeciwnie zaś chcąc dodadź lub odciągnąć $3\sqrt{ab}$ do lub od $\sqrt{ab}$, albo $4\sqrt{-x}$, $2\sqrt{-x}$, wypada $4\sqrt{ab}$, $6\sqrt{-x}$ w piérwſzém; $2\sqrt{ab}$, $2\sqrt{-x}$ w drugiém działaniu, bo wſpół-czynniki liczebné nie odmieniaią natury funkcyi.

Mogą częſtokroć funkcye niewymierné pokázać ſię na pozór różnémi, lubo w ſaméy rzeczy takiémi nie ſą, n.p. $3\sqrt{xa^2}$, $a\sqrt{4x}$, albo $12x\sqrt{-d}$, $2\sqrt{-dx^2}$, na rozeznanie tego náleży ich wyráz uprościć, wydobywſzy s pod znaku té ilości, któré bydź mogą wydobyté, lub wciągnąwſzy niektóré pod znak podług niedáwno przepiſanégo ſpoſobu w §. 13. a przywiódłſzy ié takim ſpoſobém do iednoſtaynégo wyrazu pokáże nám ſię práwdziwé ich znaczenie: i tak w przykładzie naſzym $3\sqrt{xa^2} = 3a\sqrt{x}$, $a\sqrt{4x} = 2a\sqrt{x}$ - $2\sqrt{-dx^2} = 2x\sqrt{-d}$, widziémy teráz że $3a\sqrt{x}$ i $2a\sqrt{x}$, $12x\sqrt{-d}$ i $2x\sqrt{-d}$ ſą funkcye iednakié.

Ale maiąc funkcye pod różnémi znakami piérwiáſtkowémi, nie możnażby ich przywieśdź do iednégo znaku bez naruſzenia ich wártości, n.p. $\sqrt{ax} + \sqrt[3]{yd} + \sqrt[m]{a^4z}$? Odpowiedź na to ieſt barzo łatwá. Przerabiać wykładnika znaku piérwiáſtkowégo na inny, ieſt to podwyżſzyć lub zmniéyſzyć piérwiáſtek potęgi w funkcyi pod tym znakiem zoſtaiącéy; w téy odmianie ocálémy zupełnie wártość funkcyi, ieżeli ſamę ilość pod znakiém do tylé wyżſzéy lub niżſzéy potęgi wyniesiémy, ilé ſię powiękſzyć lub zmniéyſzyć powinien piérwiáſtek w tém przerobieniu; wykonywámy bowiem tym ſpoſobém dwa działaniá przeciwné, á zatém to co iedno odmienia w funkcyi, drugié znosi i przywráca ią do dáwnéy wártości: i tak n.p. w funkcyi $\sqrt{ax}$ możémy wykładnika znaku podług woli odmienić, bylebyśmy tę ſamę odmianę czynili i w

Przywodzenie do iednégo znaku piérwiáſtkowégo.

funkcyi pod znakiém; chcąc n.p. wykładnika 2 zamienić na 4. 6. 8. i t. d. przez tę ſamę liczbę mnożę zaraz wykładnika znaku piérwiaſtkowego i funkcyi; mám $\sqrt{ax}$, $\sqrt[4]{a^2x^2}$, $\sqrt[6]{a^3x^3}$, $\sqrt[8]{a^4x^4}$, i t.d. które toż ſamo znaczą; té bowiém funkcye podług wyżſzych wiadomości ſą równé.

$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{4}}x^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{4}{8}}x^{\frac{4}{8}}$ ułomki zaś $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

W rzeczy więc ſaméy to pytanie na tém ſię kończy, żeby wykładniki ułomkowé odmienić na inné z ocáleniém ich wártości: i przywieśdź funkcye $\sqrt{ax}+\sqrt[3]{yd}+\sqrt[m]{a^4z}$ do iednégo wykładnika znaku; ieſt to iedno, co przywieśdź wykładniki ułomkowé ilości do tego ſamégo mianownika. A zatém w funkcyi $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{m}}z^{\frac{1}{m}}$ trzeba $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4+1}{m}$ przywieśdź do iednégo mianownika $\frac{3m+2m+24+6}{6m}$: więc $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{m}}z^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{3m}{6m}}x^{\frac{3m}{6m}}+y^{\frac{2m}{6m}}d^{\frac{2m}{6m}}+a^{\frac{24}{6m}}z^{\frac{6}{6m}}=\sqrt[6m]{a^{3m}x^{3m}}+\sqrt[6m]{y^{2m}d^{2m}}+\sqrt[6m]{a^{24}z^{6}}$.

Wynoſzenie do potęg i wyciąganie piérwiáſtków.

Działanie, któréśmy dopiéro odbyli, potrzebuie mnożeniá wykładników, mnożyć zaś wykładniki iakiéy funkcyi ieſt to wynosić ią do potęgi, tak iak dzieląc wykładnika téyże funkcyi, ieſt to wyciągać z niéy piérwiáſtek. Wſzyſtkié funkcye niewymierné wyrážaiąc ſię przez wykładniki ułomkowé podlegaią podobnym prawidłom w tych dwóch działániach, tak dalece; że ſtóſuiąc ié do ułomków przyzwoicie, w wynoſzeniu do potęg przypadnie nám mnożyć liczników, w wyciąganiu zaś piérwiáſtków mianownika ułomku wykładnikowégo. Aże w funkcyi niewymiernéy, licznik ieſt wykładnikiém ilości, mianownik zaś wykładnikiém znaku piérwiaſtkowégo, więc wy-

noſząc

nofząc n. p. $\sqrt[3]{(x+a)}$ do potęgi m náleży nám przez m mnożyć wykładnika ilości i wypadnie potęga m $\sqrt[3]{(x+a)^m}$: wyciągaiąc zaś pierwiáftek potęgi m z funkcyi $\sqrt[3]{(x+a)}$, przypádá wykładniká znaku pierwiáftkowégo rozmnożyć przez m, co daie $\sqrt[3m]{(a+x)}$ pierwiáftek potęgi m funkcyi $\sqrt[3]{(x+a)}$.

Chcąc mnożyć lub dzielić iednę ilość niewymierną przez drugą takąż, mámy do czynieniá z wykładnikami ułomkowémi, które tak iak w funkcyach wymiernych náleży dodadź do fiebie w piewfzém, odciągnąć zaś w drugiém działaniu u tych famych liter. Ażc ułomków nie możémy dodawać ani odciagać nie przywiodłfzy ich do iednégo mianownika, więc niżeli przyftąpiémy do mnożenia lub dzielenia funkcyi niewymiernych, náleży ié wprzód przywieśdź do tego famégo znaku pierwiáftkowégo; i tak $\sqrt[m]{a^n b^p}$. $\sqrt[q]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}} = a^{\frac{qn+rm}{qm}} b^{\frac{pq+sm}{qm}} = \sqrt[qm]{(a^{qn+rm} b^{pq+sm})}$; to famo fłuży i na dzielenie n. p. $\sqrt[m]{a^n b^p} : \sqrt[q]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}} = a^{\frac{nq-rm}{qm}} b^{\frac{pq-sm}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{nq-rm} b^{pq-sm}}$. Ieżeli zaś znaki zachodzą té famé w mnożnikach, nie zoftaie tylko rozmnożyć famé ilości podłożywfzy ich mnogości tenże fám znak. n.p. $\sqrt{ab}.\sqrt{ac} = \sqrt{a^2bc} = a\sqrt{bc}$.

Skąd fię wnofi że $\sqrt{a}.\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{a}.-\sqrt{a} = -\sqrt{a^2} = -a$, to ieft: że mnożąc dwie funkcye pierwiáftkowé téż famé przez fię, wypadá w mnożeniu fama funkcyá bez znaku pierwiáftkowégo, dodatna ieżeli znaki fą téż famé; odiemna, ieżeli fą różné: co fię także wyciągá z wzorów ogólnych uczyniwfzy $qn = rm = qm$, $pq = sm = qm$.

Mnożenie i Dzielenie.

Funkcye pierwiaſtkowe uroione wyrazićby ſię także powinny przez wykładniki ułomkowe. Ale że ich cecha zależy na znaku odiemnym położonym po znaku pierwiaſtkowym, który ma wykładnika parzyſtego, dla tego wynaleśdź nam potrzeba różnicę na to znaczenie: bo n.p. $\sqrt{-a}$ wyraziwſzy przez $-a^{\frac{1}{2}}$ mógłby kto znak odiemny przywiązać do znaku pierwiaſtkowego a nie do ſamey ilości, przez coby uroioną wziął za rzetelną. Zabieżemy temu przez znaczenie $(-a)^{\frac{1}{2}}$ gdzie iuż znak przed nawiaſami należeć będzie do znaku pierwiaſtkowego, znak zaś pomiędzy nawiaſami do ſamey ilości; a ponieważ $-a$ uważać ſię może iako $a.-1$ przeto $(-a)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\sqrt{-1}$. wſzyſtkie więc funkcye uroione znaczyć odtąd będziem mogli tym ſpoſobem n. p. $\sqrt{-3x}=\sqrt{3x}\sqrt{-1}$. Zaczem ponieważ w funkcyach uroionych dwoiakie znaki należy rozrożnić, iedne które należą do znaku pierwiaſtkowego, drugie które należą do ſamey ilości, trzeba w działaniu mieć wielką baczność na kombinacyą tych dwoiakich znaków, która lubo dzieie ſię zgodnie do wſzyſtkich prawideł znaków, prowadzi nas do wypadków na pozor zdawaiących ſię im ſprzeciwiać.

Funkcye uroione ſą przypadkiem ſzczególnym funkcyi niewymiernych: wſzyſtkie więc prawidła któreśmy na te oſtatnie znaleźli, ſłużyć muſzą i pierwſzym. Maiąc zatem do mnożenia $\sqrt{-b}.\sqrt{-c}$, mamy w rzeczy ſamey $\sqrt{b}.\sqrt{-1}.\sqrt{c}.\sqrt{-1}$ czyli $\sqrt{bc}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$; aże $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$; zaczem $\sqrt{b}.\sqrt{-1}.\sqrt{c}.\sqrt{-1}=-\sqrt{bc}$. podobnie $\sqrt{-b}.-\sqrt{-c}=+\sqrt{bc}$, $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}=-a$, dwie więc funkcye uroione rozmnożone przez ſię, wydaią mnogość rzetelną.

Prawda ta tak oczywiſta, i ze wſzyſtkiemi prawidłami działań zupełnie ſię zgadzaiąca nie powinna nikogo zadziwiać, uważaiąc każdą funkcyą uroioną iako wypadek oſtatnich kombinacyi rachunku, do którego nas przywieśdź może rozwiązanie iakiegokolwiek

zrównaniá ſtopnia párzyſtégo, Związek bowiem w zrównaniu mógł bydź prawdziwy, ale go ſtóſuiąc do pewnégo przypádku ſtáł ſię niepodobnym. Zdaie mi ſię więc, że piérwiáſtki uroioné ſą tylko przypádkámi ſzczególnémi rozwiązania ogólnégo, pokazuiącémi gdzie ſię, to rościągnąć nie może, iako niżey będziémy mieli tego dowody. Mnożąc więc dwie funkcye przez ſię, wrácámy ſię do tych práwdziwych ogolniéyſzych kombinacyi s których powſtały.

Zatrzymáymy ſię ieſzcze nad tém działaniem. Mnożąc $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ wypáda za mnogość a^2+b^2 funkcya rzetelna, $(a^2+b^2)(a+b\sqrt{-1})=a^3+ab^2+a^2b.\sqrt{-1}+b^3\sqrt{-1}$ funkcyá uroioná; - - - - $(a^3+ab^2+a^2b\sqrt{-1}+b^3\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^4+2a^2b^2+b^4$ funkcya znowu rzetelna; i t. d. Widziémy więc że mnogość s funkcyi uroionych nigdy nie może ſię ſtać rzetelną, tylko kiedy liczba mnożników uroionych ieſt párzyſtá.

Nauczywſzy ſię obchodzić z funkcyami niewymiérnémi w różnych zachodzących działaniach, wróćmy ſię do naſzych uwag, i użyimy dopiero wyłożonych na mnożenie prawideł: chcąc ſię doświadczeniém przekonać o téy práwdzie, ktoréyśmy oczywiſtém rozumowaniém doſzli to ieſt: że zrównanie drugiégo ſtopnia zamyká koniecznie dwa piérwiáſtki, które przywiodłſzy do zero, i rozmnożywſzy przez ſię, otrzymamy to ſamo w mnogości zrównanie, które nám było do rozwiązaniá podané. Iakóż rządząc ſię prawidłami mnożeniá.

$$\left(x+\tfrac{1}{2}A+\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-D)}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}A-\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-D)}\right)=x^2+Ax+D=0.$$

Wſzyſtkié więc zrównaniá *2go* ſtopnia uwážané bydź mogą iako zroſłé z dwóch zrównáń *1go* ſtopnia przez ſiebie rozmnożonych, których albo obydwa piérwiáſtki ſą rzetelne, albo obydwa uroioné: każdy s takowych piérwiáſtków rozwięzuie iakié pytanie, albo daie odpowiedź inną na toż ſamo. Zaczém zrównanie *2go* ſtopnia ieſt zawſze ſkładém dwóch

pytáń

pytáń proſtych oznaczonych przez dwa piérwiáſtki tegóż zrównaniá. Każdé zrównanie 1go ſtopnia na które ſię zrównanie 2go rozbiérá, ieſt równé zeró; więc wártość na x, s któregokolwiek z nich wyciągnioná i włożoná w zrównanie 2go ſtopnia przywieśdź ié powinna do zero, iako działanie każdego o tém przekona w teraźniéyſzym przykładzie. Przeto każda wartość ilości nieznanéy która włożona w zrównanie 2go ſtopnia przywiedzie ié do zero, ieſt piérwiáſtkiém zrównaniá: takich zaś wártości nie może bydź więcéy nad dwie. Powtoré znaláźłſzy innym iakim ſpoſobém ieden tylko piérwiáſtek, a rozdzieliwſzy przezeń zrównanie 2go ſtopnia podané, otrzymámy piérwiáſtek drugi.

Niżeli rościągniémy daléy teraźniéyſzé uwági, rozwiążmy sobie ieſzcze iedno zadanie, które nás wprawi w używanie prawideł w tym Rozdziale wyłożonych.

Zadanie: ,,Maiąc dwie świece nierownie światła ,,udzielaiącé złączoné przez linią proſtą, wynaleśdź ,,na téy linii mieyſce rownie od obydwóch oświécone?,,

Na rozwiązanie tego pytaniá przypuścić nám tu potrzeba ieden początek optyczny, że iaſności rozrzucané od ciał świécących tak ſię maią do ſiebie, iako potęgi drugié wywrotné ich odległości: (*in ratione inverſa duplicata diſtantiarum*). Tak że ieżeli w odległości a iaſność ieſt równá c, w odległości x rowná będzie $\frac{ca^2}{x^2}$. Chcąc teraz doyśdź światła każdéy w ſzczególności świécy, równać powinniśmy iaſność iednéy i drugiéy rzuconą w téyże ſaméy odległości na iaką płaſzczyznę: połóżmy więc że piérwſza świeca daie iaſność c w odległości a; drugá światłość d w téyże ſaméy odległości; nazwáwſzy odległość dwóch świec od ſiebie b, odległość piérwſzéy świécy od miéyſca którégo ſzukámy x, będzie odległość drugiéy od tegóż mieyſca $b—x$. Wypadá więc s początku optycznego że świéca piérwſza w odległości x będzie

dáwáć

dáwać światła $\frac{ca^2}{x^2}$; drugá w odległości $b-x$, udzieli światła $\frac{da^2}{(b-x)^2}$; a ponieważ podług warunku pytaniá obydwa te światła bydź powinny równe, idzie zatem że - - $\frac{ca^2}{x^2}=\frac{da^2}{(b-x)^2}$; zniosłszy ułomki i rosporządziwszy terminy podług potęg x, otrzymámy:

$x^2-\frac{2bc}{c-d}x=-\frac{cb^2}{c-d}$ - - $x^2-\frac{2bc}{c-d}x+\frac{b^2c^2}{(c-d)^2}=\frac{b^2cd}{(c-d)^2}$

$x-\frac{bc}{c-d}=\pm\frac{b\sqrt{cd}}{c-d}$ czyli - - - $x=\frac{bc\pm b\sqrt{cd}}{c-d}$ odległość pierwszey świecy; - - $b-x=-\frac{b(d\pm\sqrt{cd})}{c-d}$ odległość drugiey świecy od mieysca równie oświeconego.

Ponieważ x má dwie wártości, przeto muszą bydź koniecznie dwa takowe mieysca. Roztrząśniymy teráz wszystkie przypádki w zrównaniu zawarte i ściągaiące się do różnych stopni światła, to iest kiedy $c>d$; powtóre kiedy $c<d$; nakoniec kiedy $c=d$.

Co do pierwszego, ieżeli $c>d$, $c>\sqrt{cd}$, i $d<\sqrt{cd}$: pierwszá więc wártość na x, $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$ iest ilością dodatną, ale że $(c+\sqrt{cd})>(c-d)$, więc $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}>b$, dlá tego mieysce to przypadá aż za drugą świecą słabszą. Drugá odległość $b-x=-\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$ iest odiemną, więc przypadá na przeciwną stronę podług tego cośmy mówili o iłościach odiemnych. Drugá wártość na x iest $\frac{b(c-\sqrt{cd})}{c-d}$ iest także dodatná, ale że

mnieyszá

mnieyſzá od b, więc to mieyſce przypadá między dwiema świecami, i na ten czas drugá odległość $b-x=$ $\frac{b(\sqrt{cd}-d)}{c-d}$ ieſt dodatná iako bydź powinna. Widzemy więc że kiedy $c>d$, zadanie má dwie odpowiedzi, a przeto ſą dwa takowe mieyſca, s których iedno przypadá między dwiema świecami, drugie za świecą ſłabſzą. Daymy n.p. że $c=4d$, $b=30$ ſtóp, więc $x=60$ ſtóp, $b-x=-30$ ſtóp na pierwſzą odpowiedź; powtóre $x=20$ ſtóp, $b-x=10$ ſtóp na odpowiedź drugą, co ſię zupełnie zgadza z doświadczeniem

Przypuśćmy potem że $c<d$, $c<\sqrt{cd}$, $d>\sqrt{cd}$, w tym przypádku nic więcey nie czyniemy; tylko że przenoſzemy światło mocnieyſze na mieyſce ſłabſzégo, a ſłabſze na mieyſce mocnieyſzego, zaczem odpowiedzi będą te ſame co i przedtem tylko ſtóſownie do teraźnieyſzych odmián.

Połóżmy na koniec obydwa światła równe to ieſt $c=d$; na ten czás $x=\frac{b(c+c)}{0}$; - - $b-x=\frac{b(d+d)}{0}$; powtóre $x=\frac{0}{0}$, $b-x=\frac{0}{0}$; obydwie pierwſze wártości ſą równe ułomkom maiącym za mianownika zero, czyli ilość nieſkończenie małą; ſą więc nieſkończenie wielkie. Cóż to znaczy?

Tłómaczy ſię znaczenie ilości nieskończenie wielkiéy, i nieskończenie małéy, i wyrazu nieoznaczonégo $\frac{0}{0}$

Każdá ilość odmieniaiąc ſię nie może tylko albo ſię powiękſzać albo zmnieyſzać. W pierwſzym razie dorzucaiąc iey ilekolwiek bądź podobnych ilości, wzráſtá; ale nie przeſtaie nigdy bydź ilością ſkończoną: iednakowóż wzraſtaiąc zawſze zbliża ſię co ráz bárziey do pewney granicy, którą my ſobie wyſtawiámy w umyśle, abyśmy ſtóſuiąc do niey iakiekolwiek bądź wielkości, mogli o ich wártościach ſądzić: tą granicą ieſt ilość nieſkończenie wielká która ſię znaczy przez $\frac{1}{0}$ albo przez ∞; nie maſz iey w naturze, w którey wſzyſtkie rzeczy ſą ſkończone, ale to ieſt tylko ſtworzeniem rozumu wymyślonem do mierzeniá iakichkolwiek bądź wzroſtów ilości. Drugi

Drugi przymiot ilości to iest zmnieyſzanie ſię ciągłe, potrzebowało podobney granicy, do którey ią odnoſząc, moglibyśmy bydź w ſtanie ſądzenia o ich wártościach: taką granicą ieſt zero *o*. czyli ilość nieſkończenie mała która tak iak pierwſza nie ma ieſteſtwa tylko w ſamym umyśle.

Każda ilość wzráſtaiąc lub ubywaiąc przybliża ſię do iedney s tych granic ale iey nigdy nie może doſiąc, boby tym ſpoſobem z ilości rzetelney ſtała ſię zmyśloną. Ieżeli ſię kiedy przytrafi że iaka wártość w zrównaniu zamieni ſię na $\frac{1}{o}$ albo na *o*, znakiem ieſt, że w naturze takowy przypádek podług ściſłości geometryczney nie ma mieyſca, ale że ie mieć może w ſpoſobie práwdy bliſkim. n. p. przypuściwſzy w naſzem zadaniu $c=d$ znaleźliśmy na x i $b-x$ ilość nieſkończoną: co nás uczy, że iedna s tych odległości nie może ſię znaydować w naturze; że na ten czás pytanie naſze nie należy do drugiego ſtopnia ale do 1go, iako nás zaráz początkowe uczy zrównanie. Ieżeli atoli nie będziemy brać rzeczy w náyſkrupulatnieyſzey ściſłości, drugie to mieyſce mogłoby bydź naznaczone w tak wielkiey odległości, przed którąby niknąć mogła odległość dwóch świec, co zawſze w naturze daie tylko wártość bliſką práwdy. Każda funkcya cálka ſtaie ſię nieſkończenie wielką, kiedy który z iey terminów ſtanie ſię takim; nieſkończenie zaś mała kiedy który z iey mnożników ieſt zero. Każda zaś funkcya ułomkowa ſtaie ſię nieſkończenie małą, kiedy iey licznik, kiedy zaś iey mianownik ieſt zero, ſtaie ſię nieſkończenie wielką, co wypadá koniecznie z natury ułomków.

Między dwiema granicami $\frac{1}{o}$, *o*, zawarte ſą wſzyſtkie ilości ſkończone i rzetelne; które pokazuią ſię w rachunku pod znakiem $\frac{o}{o}$, ieżeli w oſtatnie wypádki wprowadziliśmy iaką kondycyą do którey rachunek naſz nie należy. Znak więc $\frac{o}{o}$ uczy nás, że rzecz

którey

którey szukámy iest podobná, że má wártość skończoną, ale że te ostatnie wypádki nie mogą iey naznaczyć, a zatém náleży się aż do początkowego wrócić zrównaniá, i wprowadzić w nie ten warunek nowy, który zapewne coś w zrównaniu odmieniwszy, odkryie nám dokładnie to czego szukámy. I tak w teraźnieyszym przykładzie wprowadziliśmy do ostatniego zrównaniá $c = d$, kondycyą która zniżá zrównanie do pierwszego stopnia i daie nám $b = 2x$, czyli $x = \frac{b}{2}$, to iest: że w tym przypádku iedno iest tylko takowe mieysce w samym środku odległości dwóch świec od siebie: szukaiąc tey odległości w zrównaniu 2go stopnia gdzie iuż iedna wártość stała się nieskończoną, i kombinuiąc to mieysce niepodobne s podobnem, nie mogliśmy zaiste nic wyciągnąć oznaczonego w takowey kombinacyi, o czém nás sám rachunek przestrzegł.

Ieżeli ilość iaká przeszedłszy za granicę ostatnią swego wzrostu lub ubywaniá zaczyná znowu brać wártosci iakie, te nie mogą bydź tylko nieskończone uważaiąc ie w takim względzie iak przedtem, i na ten czás wypádaią różne porządki ilości nieskończonych, które Matematyka wyższá rostrząsa: ieżeli zas te wártości są skończone nie mogą one znaydować się w tym stanie i względzie, w iakim były przedtem: bo iuż skończyły zupełnie swóy bieg dáwny i swoię nawet miarę stósunku; nie mogły one więc pokázać się tylko innemi od tego, czém były przedtem; to bowiem przeyście nic innego nie znaczy, tylko że wzrosty lub ubywaniá ilości w tym względzie są niepodobnemi, ale podobnemi w względzie inszym. Ieżeli więc ilość iaká była dodátną, a w tym stanie stała się dla pewney wártości $\frac{1}{0}$ albo o; rosnąc znowu potém staie się odiemną albo z odiemney dodátną, i dla tegoć to podobno ilości odiemne nazwano MNIEYSZEMI OD NICZEGO

czego (*minores nihilô*); nazwiſko barzo ſzczególné, które tu dopiéro może bydź obiaśnioné.

Ieżeli więc niektórzy Autorowie wyrywaią ſię zaráz z niém przy wſtępie, możémy s teraźniéyſzych i przeſzłych uwág rossądzić iak mało znáią teoryą ilości dodátnych i odiemnych. Oprócz wielkiéy nieprzyzwoitości przez którą uczących ſię wprawiaią w ciemné i dziwaczné rzeczy opiſywanie, błądzą przeciwko prawom geometrycznym daiąc nazwiſko powſzechné barzo ſzczególnému przypádkowi, i wprowádzaiąc niezrozumiany ięzyk w tę naukę, która s swéy natury ieſt ſtolicą iasności i przekonaniá. Staráymy ſię wrazić náygłębiéy w umyſł i pamięć teraźniéyſzé uwági, bo ony ſłużyć nám będą do iaſnégo zrozumieniá wyżſzych Matematycznych nauk, których ſą náypiérwſzym gruntém.

S tego tłómaczeniá ſpytá ſię nie ieden, iak rozróżnić wypádki pokazuiącé nám piérwiáſtki uroioné w zrównaniu, od tych które nás przyprowádzaia do $\frac{1}{0}$ albo do *o*; ale na to doſyć mu zrozumieć dobrze opiſanie dwóch tych rzeczy, a przyzná że inná ieſt rzecz, kiedy iaká odpowiédź ſtaie ſię dla pewnégo warunku wcale niepodobną, a inná znowu kiedy odpowiédź ieſt niepodobná dla pewnéy kombinacyi od któréy nie záleży. Ale piérwiáſtki uroioné będą ieſzcze miały rozlegléyſzé znaczenie niżéy.

§. XVII.

Wypádki poprzedzaiących uwág i prawidła zrównáń 2go ſtopnia daléy rościągnione.

Przykłady któréśmy ſobie obrali dlá doświadczeniá prawideł na zrównanie 2go ſtopnia dały nám poznać, że wypádki Algebraiczné nie tylko nám odkrywaią práwdziwą wártość ilości nieznanéy, ale nawet i ſtán iéy w którym ſię względém innych znayduie i do którégo náleży odpowiédź pytaniá podług wiadomości o funkcyach dodátnych i odiemnych wyżéy wyłożonéy. Kiedy więc nadaiémy znaczeniá rzeczom w pytaniu zawartym nie náleży nám ſie troſzczéć czyliśmy ié przyzwoitym znakiém nacechowali lub nie?

oſtatnié bowiem wypádki nauczą nás tego; ieżeli w nich ilość nieznana wypadá s tym ſamym znakiém ktoryśmy iéy na początku pytaniá nadali, pokazuie że naſzé cechowanie było dobré; ieżeli zaś wypadnie ze znakiem przeciwnym, oſtrzegá nás, że to cośmy wzięli w péwnym względzie, powinno było bydź wzięté w względzie przeciwnym. Rachunek więc Algebraiczny ſamé nawet błędy znaczeniá poprawiá.

Zachodzi nám tu iedno pytanie: czyli prawidła podané na rozwiązanie zrównáń 2go ſtopnia nie mogą bydź rościągnioné do ſtopni wyżſzych? To pytanie ſtóſowáć możná do dwóch przypádków, albo kiedy zrównaniá wyżſzych ſtopni zamykaią tylko pewné terminy iakowé podobiéńſtwo maiącé s témi, które w drugim ſtopniu zachodzą; albo kiedy zrównaniá zamykaią wſzyſtkié terminy ſwych ſtopni, lub niektóré niemogącé ſię zrównać s terminami *2go* ſtopnia. Wnieſie ſobie każdy że tu nie rozumiém innych terminów tylko té które zamykaią ilość nieznaną, bo cáłá uwága naſza na té tylko terminy w rozwięzywaniu zrównáń bydź powinna obróconá. Co do piérwſzégo przypádku: ponieważ zrównanie *2go* ſtopnia powſtaiącé s funkcyi dwó-kſztáłtnéy zawiérá terminy x^2+Ax, gdzie wykładnik *2go* terminu ieſt połową wykładnika *1go*; więc ieżeli iakiekolwiek zrównanie będzie zamykało w dwóch terminach ilość nieznaną tak, że wykładnik *2go* terminu będzie połową wykładnika *1go*, té ſamé reguły które nám tu ſłużyły, będą ieſzcze mogły bydź użyté na rozwiązanie takowych zrównáń. Dáymy n.p. że mámy zrównanie $x^{2m}+Ax^m+D=o$. gdzie m ieſt iakąkolwiek liczbą, to zapewne rozwiązać ſię może ſpoſobém *2go* ſtopnia; uczyniwſzy bowiem $x^m=y$, a zatém $x=\sqrt[m]{y}$, zrównanie naprzód podané, odmieni ſię na zrównanie *2go* ſtopnia $y^2+Ay+D=o$, które rozwiązáwſzy, wynáydziémy $y=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}$ - - -

$$x=\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}\right)}.$$

Ieżeli

Ieżeli zaś zrównania wyższych stopni nie będą miały kondycyi dopiero wyłożoney; na ten czás prawidła 2go stopnia nie będą mogły bydź na ich rozwiązanie użyte. Uciekaiąc się do własności potęg, które nas także przywiodły do prawideł na drugi stopień, potrzebaby nasamprzód aby współ-czynniki wszystkie ilości nieznaney, miały takowe wártości iakich każdá w szczególności potęga wyciągá; inaczey nie udałoby nám się wyciąganie z nich pierwiástków. Ale ktokolwiek zatrzymá się nad temi warunkami, pozna, że takowym sposobem uszczególniámy barzo teoryą zrównán, przywięzuiąc ich terminy do tych a nie inszych wártości. Reguły na takowe szczególne przypadki nie posunęłyby cale granic nauki, która swóy szacunek zabierá od ogólności początków. Trzebaby przeto wpuścić myśl naszę w głębsze i rozleglèysze badania, do których nás samo tylko doskonalsze poznanie zrównán wyższych stopni może przyprowadzić. Usiłuymy więc poznać lepiey własności zrównán iakichkolwiek stopni, w których może nám nie będzie trudno upatrzyć reguły na ich rozwiązanie. Ale iakąż drogą przyidziemy do tego poznania? Zbierzmy krótko nasamprzód treść całey nauki tego Rozdziału, a może w nim znáydziemy łańcuch myśli, za którym nám iśdź będzie potrzeba.

Treść nauki w całym Rozdziale.

Zrównania z eliminacyi wypadłe przywiodły nás do zrównania 2go stopnia; te znowu pokázały nám funkcye sobie podobne, któreśmy nazwali dwó-kształtnemi dla dwoiakich wártości ich znaków. Mámy więc każdemu rodzaiowi zrównán odpowiadaiący rodzáy podobny funkcyi, a tamte przywiodły nás zawsze do tych, i do działán im właściwych. I lubo w iakiemkolwiek zadaniu funkcyá poprzedzać musi zrównanie podług różnicy między niemi uczynioney w §. 2; że iednak przez związek myśli postępuiemy do prawdziwego poznawania, idzie zatem, że od zrównania przyiśdź musiał rozum ludzki do własności funkcyi, rostrząsaiąc zbiór myśli i warunków,

które w tém związku porównał. Funkcye dwókształtné odkryły nám swoie piérwiáſtki; mamy więc piérwiáſtki funkcyi i piérwiáſtki zrównáń: a iako piérwſzá potęga ieſt piérwiáſtkiém innych wyżſzych w funkcyi iakiéy nieznanéy ilości; tak zrównanie 1go ſtopnia uważać ſię może iako pierwiáſtek wyżſzych zrównáń, lubo w innym względzie, bo tam zważaią ſię piérwiáſtki co do ilości w funkcyą iednokſztáłtną wchodzących, które zawſze bydź powinny té ſámé; tu zaś co do związku który może różny lub tenżé ſám zachodzić w piérwiáſtkach zrównaniá.

Przyſzliśmy bowiem przez oczywiſté barzo początki do téy gruntowéy prawdy, że zrównaniá 2go ſtopnia uważać ſię powinny iako złożoné z dwóch zrównáń 1go; té ſamé początki ſłużą nám do przekonaniá ſię że zrównaniá 3go, 4go, i t. d. ſtopnia zważané bydź mogą iako powſtaiącé s trzéch, cztérech, i iedném ſłowém s tylu zrównáń piérwſzégo ſtopnia, ilé ilość nieznaná má iedności w náywyżſzym wykładniku. Ieżeli tén wnioſek zdaie nám ſię za nágły, przyidziémy potém do niego przez inné początki. Nie możémy go atoli nie użyć do odkryciá właſności zrównáń iakiégokolwiék ſtopnia. A naprzód ieżeli potęga drugá funkcyi przywiodła nás do wzoru ogólnégo zrównáń 2go ſtopnia; potęgi także wyżſzé odkryią nám podobné wzory do wyżſzych zrównáń, doſyć nám bowiém upowſzechnić wſpółczynniki ilości nieznanéy w każdym terminie, i termin oſtatni, to ieſt rosciągnąć ié do iakichkolwiek ilości znanych, i wprowadzić w funkcye związek; a natychmiáſt Tablica §. 12. nauczy nás o wzorze przywiązanym do zrównaniá każdégo ſtopnia.

RO-

ROZDZIAŁ TRZECI.

Nowy Sposób uważania Zrównań dostrzeżony w poprzedzaiących wiadomościach daie nam barziey poznawać sztukę i moc RACHUNKU, za którego pomocą odkrywaią się OGÓLNE WŁASNOŚCI ZRÓWNAN JAKIEGOKOLWIEK STOPNIA: pokazuią się wzaiemne pomocy spływaiące s teoryi Zrównań na Funkcye, i s teoryi funkcyi na Zrównania.

§. XVIII.

Uczyńmy tu nasamprzód potrzebną uwagę nad postępkiem naszego rozumowania. W poprzedzaiących dwóch rozdziałach szliśmy od zrównania do pierwiastków, dla tego, że tam iedno pytanie rzuciło tyle światła w nasze badania, żeśmy nie mieli trudności poiąć naturę zrównania i funkcyi; s których opisu wypadły nam różne własności zrównań 1go i 2go stopnia. Te ostatnie atoli potrzebowały iuż znaczney pomocy rachunku dla tego, że kombinacye w nich zawarte iuż są barziey zawikłane. Im do wyższych postąpiemy stopni, tem się zapuszczemy w delikatnieysze i cięższe stosonki, pod których liczbą upadłaby myśl nasza, gdyby nie była wsparta pomocą rachunku, i wiadomości iuż nabytych. Aże dochodzemy zawsze rzeczy nieznanych przez znane; każda walna prawda dostrzeżona, iest dla nás nową drogą do innych odległeyszych. Zrównania 2go stopnia pokazały nam oczywiście, że zrównania 1go stopnia wchodzą za pierwiastki w wszystkie inne. Szukać więc będziemy własności zrównań wyższych stopni za pomocą pierwszego; i poydziemy teraz od pierwiastków do zrównań. W tym postępku pomożemy

Uwagi Loiczne obiaśniaiące sposób myślenia przez rachunek.

niezmiernie naſzym myślom, bo rachunek oſzczędzi nám wiele kombinacyi, których mnogość ucisnęłaby niezmiernie naſze myśli. Całe więc myślenie do zrównáń 1go ſtopnia i iego działáń przywiązane odpadnie nám, a uwága naſza nie będzie miała do rostrząśnieniá iak tylko nowe prawdy, które s tąd wypadną. Owóż cała Metafizyka myślenia przez rachunek! w nim nagimámy badaniá naſze do ſił rozumu, i uſiłuiémy rozumowaniá naſze przywieśdź do iak náymniéyſzéy liczby: wſzyſtkie zbyt odległe i zawarte w poſiłkach odpádaią od naſzéy uwági i zamieniaią ſię w formuły i mechanizm, a ſame tylko iſtotne zoſtaią ſię przy umyśle, aby ſwobodniéyſzy przez ten ſpoſób, mogł prędzéy i dokładniéy poſtrzégać nowe prawdy, które z rachunku wypádaią. Teráz n. p. użyiémy różnych działań i właſności zrównáń 1go ſtopnia, ale te wſzyſtkie kombinacye które do tych działáń i zrównáń ſą przywiązane, ſą nám teráz niepotrzebne. Gdybyśmy ie byli obowiązani mieć przytomne w umyśle, mnogość myśli zmieſzałaby naſzę attencyą nie pozwoliwſzy nám daléy przeniknąć. Rachunek więc nie tłumi rozumowaniá, ale nám ile bydź może oſzczędza tego, ktoreśmy iuż ráz uczynili, a które ciężąc na uwádze, tamowałyby dalſze poſtępowanie naſze do prawdy. Nie możémy nie uznać iak ta ekonomiá ieſt nieodbicie naſzym myślom potrzebná, bez któréy tyle innych nauk ulgnąwſzy na piérwſzych doſtzeżeniach i pewnych ſzczególnych prawdach, nie mogą ſię wynieść do innych zawikléyſzych.

§. XIX.

Nie oddaláymy ſię od tego na czymeśmy ſtanęli. Przedſięwzięliśmy dochodzić właſności zrównáń wyżſzych iakichkolwiek ſtopni przez ſkładanie ich z zrównáń ſtopnia piérwſzego; wziąwſzy więc kilka zrównáń 1go ſtopnia $x-a=o$, $x-b=o$, $x-c=o$, $x-d=o$ $x-e=o$, których wſzyſtkie piérwiáſtki ſą dodatne;

powtore:

powtóre: $x+a=o$, $x+b=o$, $x+c=o$, $x+d=o$, $x+e=o$, i t.d. w których wſzyſtkié piérwiáſtki ſą odiemné, a rozmnożywſzy ich trzy, cztery, i t. d. przez ſię wypadnie z

$$(x-a)(x-b)(x-c)=o \text{ czyli:}$$

$$x^3 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\end{array}\right\} .x^2 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right\} .x-abc=o.$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=o$$

$$x^4 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\\-d\end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\} .x^2 \left.\begin{array}{l}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{array}\right\} .x+abcd=o.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=o \text{ czyli:}$$

$$x^3 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\end{array}\right\} .x^2 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right\} .x+abc=o.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=o.$$

$$x^4 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right\} .x^3 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\} .x^2 \left.\begin{array}{l}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right\} .x+abcd=o.$$

Zatrzymáwſzy ſię uwágą nad témi przykładami wyciągniémy z nich naſtępuiącé práwdy:

Naprzód: Każdá z ilości znanych a, b, c, d, będąc wártością nieznanéy x, ieſt piérwiáſtkiém zrównaniá, włożywſzy ią w zrównanie s tego mnożeniá powſtaiącé zniesie wſzyſtkié terminy i przywiedzie całé zrównanie do zero. Właſność więc ta piérwiáſtków dowiedzioná w dwóch poprzedzaiących ſtopniach, má mieyſce we wſzyſtkich ſtopniach wyżſzych.

Wykładaią ſię właſności ogól né zrównań iá kiégokolwiek ſtopnia.

Powtóre: Roſtrząſaiąc wſpół-czynniki ilości nieznanéy

Własności wſpół-czynników.

néy we wſzyſtkich tych terminach zrównáń, znáydziémy: że wſpół-czynnik drugiégo terminu ieſt równy ſummie wſzyſtkich piérwiáſtków z znakiém przeciwnym wziętych. Wſpół-czynnik trzeciégo terminu równy ſummie mnogości różnych, któré powſtać mogą z piérwiáſtków po dwa na ráz mnożonych: Wſpół-czynnik czwártégo terminu równy ſummie mnogości różnych s trzech na ráz piérwiáſtków; piątégo terminu ſummie mnogości s czterech na ráz piérwiáſtków i t. d. nakoniec oſtatni termin równy ieſt mnogości ze wſzyſtkich piérwiáſtków przez ſiebie rozmnożonych. Ieżeli więc w iakiémkolwiek zrównaniu brakuie drugiégo terminu, tén nie mógł zniknąć inaczéy, tylko że ſumma wſzyſtkich piérwiáſtków ſtała ſię zerò; to ieſt: że w niém znayduią ſię piérwiáſtki dodátné i odiemné, i że ſumma dodátnych ieſt równá ſummie odiemnych: ieżeli brakuie trzeciégo terminu, muſi koniecznie w takiém zrównaniu ſumma mnogości dodatnych z dwóch ná ráz piérwiáſtków, bydź równą ſummie odiemnych: podobnie náleży ſądzić o innych terminach. Ale ieżeli oſtatni termin w iakiém zrównaniu brakuie, nie mogł tén inaczéy zniknąć, tylko że iedén s piérwiáſtków zrównaniá ſtał ſię zerò; i na tén czás zrównanie rozdzielić ſię całé może przez x, i zniżyć o iedén ſtopień.

Potrzecie: Maiąc do rozwiązaniá iakiégokolwiek ſtopnia zrównanie s pewnémi oznaczonémi wſpół-czynnikami n.p. $x^3-8x^2+7x-9=0$ - - - (A). doſyćby nám było porównać iego wſpół-czynniki s wſpół-czynnikami iednégo s teraźniéyſzych zrównáń któré mu odpowiadá w tymże ſamym ſtopniu, to ieſt z zrównaniém.

$$x^3\left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right\}x-abc=0 \qquad (B).$$

a gdybyśmy potrafili wynaleśdź a, b, c, w liczbach, któré wchodzą w zrównanie (A) mielibyśmy tym ſpoſobém właściwé piérwiáſtki zrównaniá (A). Doświádczmy

świádczmy tego przez rachunek. Równaiąc wſpół-czynniki podobnych terminów zrównań (A), (B), otrzymámy $a+b+c=8$, $ab+ac+bc=7$, $abc=9$, trzy zrównaniá na tyleż nieznanych a, b, c. Ponieważ każdé s tych zrównań zamyká wſzyſtkié nieznáné, nie możemy przyſtąpić do rozwiązaniá ich, póki ich przez eliminacyą nie przerobiémy na inné trzy, z którychby w każdém nieznaydowała ſię tylko iedna s tych nieznanych. Działaiąc podług §§. 8. i 14. wynáydziémy te trzy zrównaniá.

na a - - $a^3-8a^2+7a-9=0$. na b - - $b^3-8b^2+7b-9=0$.
na c - - - $c^3-8c^2+7c-9=0$.

Widzémy że wſzyſtkié té trzy zrównaniá ſą iednakié; a ponieważ nie braliśmy piérwiáſtków a, b, c, za równé; więc trzy té zrównaniá nie dadzą nám tylko trzy piérwiáſtki rożné, s których iedén będzie wártością a, drugi wártością b, a trzeci wártością c. Te trzy zrównaniá powſtały z zrównaniá (A), i pokázały ſię w tym ſamym wyrazie co i tamto; więc wártość ilości nieznanéy w zrównaniu (A), będzie takąż ſamą i tychże ſamych ilości znanych funkcyą co i w tych oſtatnich. Przeto ieżeli té trzy zrównaniá maią trzy piérwiáſtki, zrównanie (A) tyléż ich mieć muſi, co nám oczywiście dowodzi, że zrównanie 3go ſtopnia má koniecznie trzy piérwiáſtki; że na wynalezienie tych trzech piérwiáſtków, rozwiązać nám koniecznie potrzeba zrównanié 3go ſtopnia, i że nakoniec przyſzedłſzy do tego rozwiązaniá, iedno ktorékolwiek s trzech oſtatnich zrównań odkryie nám wſzyſtkié té trzy piérwiáſtki. Na nic by nám ſię bowiem nie zdało rozwięzywać ié wſzyſtkié, kiedy w dziewięciu piérwiáſtkach nie byłoby tylko trzy różné, których ſzukámy, á które wypadną z iednégo któregokolwiek.

Ieżeli weźmiémy zrównanie 4go ſtopnia s wſpółczynnikami oznaczonémi, przyidziémy tąż ſamą drogą do téy prawdy; że ono zamyka cztery piérwiáſtki.

Nie możémy iuż więc wątpić o tém, że każdé zrównanie iakiégokolwiek ſtopnia tylé zamyká w ſobie piérwiáſtków, ilé náywyżſzy wykładnik ilości niéznanéy má w ſobie iedności. Aże zrównanie nie tylko zamykać może piérwiáſtki rzetelné ale i uroioné; piérwiáſtki zaś uroioné nie znoſzą ſię tylkó kiedy ſą w liczbie párzyſtéy, zaczém każdé zrównanie iakiégokolwiek ſtopnia pod wyrazém rzetelnym, ieżeli má w ſobie piérwiáſtki uroioné, liczba ich bydź muſi párzyſtá: i tak zrównanie *3go* ſtopnia muſi mieć koniecznie albo wſzyſtkié trzy piérwiáſtki rzetelné, albo ieden rzetelny, a dwa uroioné. Zrównanie czwártégo ſtopnia może mieć albo wſzyſtkié cztéry piérwiáſtki rzetelné, albo wſzyſtkié uroioné; albo dwa rzetelné a dwa uroioné: podobnie náleży twiérdzić o innych.

Wláſności zrównáń co do znaków.

Poczwárte: Przypatrzywſzy ſię układowi znaków w zrównaniach z mnożeniá powſtaiących, doſtrzeżémy, że w tych gdzie wſzyſtkié piérwiáſtki ſą dodátné znaki idą na przemián, to ieſt we wſzyſtkich terminach liczby niepárzyſtéy ſą dodatné, w terminach zaś liczby párzyſtéy, odiemné; gdzie zaś piérwiáſtki wſzyſtkié ſą odiemné, tam téż ſamé znaki ciągle naſtępuią: w naſzych przykładach wypadły wſzyſtkié dodatné, ale gdybyśmy byli wzięli zrównaniá *1go* ſtopnia pod wyrazém $-x-a=o$, otrzymalibyśmy byli wſzyſtkié odiemné, w zrównaniach ſtopni niepárzyſtych. S téy uwági nad znakami wnióſł *Des-Cartes*, że w zrównaniu przemiana znáków oznaczá piérwiáſtki dodátné, ich zaś naſtępſtwo piérwiáſtki odiemné, tak dalece; że w zrównaniu n. p. - - - $x^4-13x^3+11x^2+253x-252=o$ bydźby powinno podług téy uwági trzy piérwiáſtki dodátné a iedén odiemny. Pamiętáymy iednak, że zrównaniá s których tę uwágę wyciągámy, maią wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné: możeż oná bydź rosciągnioná do zrównáń maiących piérwiáſtki uroioné?

Rozmnóżmy przez ſię té trzy zrównaniá:

$(x+\surd-3)$

$(x+\sqrt{-3})(x-\sqrt{-3})(x-6)=0$ otrzymámy: - - $x^3-6x^2+3x-18=0$. Powtóre $(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2})(x+3)=0$ otrzymámy $x^3+3x^2+2x+6=0$. układ znaków w pierwszém zrównaniu pokazuie wszystkié trzy pierwiástki dodátné, w drugiém zaś wszystkié odiemné; lubo w pierwszém ieden tylko iest dodátny a dwa uroioné, w drugiém dwa uroione, a ieden odiemny; widzémy więc oczywiście, że reguła *Des-Carta* na rospoznanie pierwiástków dodátnych i odiemnych nie służy zrównaniom maiącym pierwiástki uroioné. Wniesiono s tąd, że maiąc podané sobie iakiekolwiek zrównanie a chcąc wiedzieć, ieżeli to zamyká pierwiástki uroioné, porachowáwszy z układu znaków liczbę pierwiástków dodátnych i odiemnych, rozmnożyć ié potrzeba przez zrównanie iakie 1go stopnia; ieżeli w mnogości pokáże się pierwiástek przybyły z nowégo zrównaniá, zupełnie się zgádzaiący z liczbą ich pierwszą; zrównanie to będzie miało pierwiástki rzetelné, inaczéy wnieść należy pierwiástki uroioné: ale ta reguła nie prawdzi się tylko w pewnych przykładach, i dlá tego że ta właśność zrównań nie iest ogólná wszystkim, nie mámy przyczyny nad nią się długo zastanáwiać. Przydáymy atoli ieszcze do niéy iednę uwágę: że kiedy w zrównaniu iakiém brakuie którégo terminu, kładąc na iego mieysce $+0$, albo -0, zawsze wypadnie ta sama liczba pierwiástków dodátnych lub odiemnych z układu znaków, ieżeli zrównanie má wszystkié pierwiástki rzetelné; wypadnie zaś inná liczba na $+0$, inná na -0, ieżeli má pierwiástki uroioné.

§. XX.

Wszystkié uwági wyższé oczywiście nás przekonywaią że zrównanie iakiégokolwiek stopnia m, zamyká się w tym wyrazie ogólnym.

Rozwiązanié zrównań wyższych stopni zamyká wszystkié zrównaniá stopni niższych.

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+ \text{ i t. d. } +k=0. \quad (C).$$

gdzie p, q, r, s, k, są ilościami znanémi. Rozwiązać takowé zrównanie iest to iedno, co wynaléśdź liczbę

m wartości na x w funkcyach p, q, r, k, i t. d. s których by każda włożona za x w zrównanie podané, zniosła wſzyſtkié w niém terminy i przywiodła ié do zero. Rozwiązanie to ſtóſowné do natury umieiętności, powinno bydź tak ogólné, aby ſłużyło wſzyſtkim ſzczególnym przypádkom, któré tylko rodzić ſię mogą przez wprowadzenie iakiégokolwiek warunku w zrównanie. Dáymy więc że rozwiązáwſzy zrównanie (C) tak ogólnym ſpoſobém, uczyniémy w niém $k=o$, w tém przypuſzczeniu prawidła użyté ieſzcze té ſamé ſłużyć powinny, ale na tén czás zrównanie będzie całé rozdzielné przez x i odmieni ſię na

$$x^{m-1}+px^{m-2}+qx^{m-3}+rx^{m-4}+ \text{ i t. d. } + i = o \quad (D).$$

Zrównanie ſtopnia $m-1$, któré nie może ſię rozwiązać, tylko przez prawidła właściwé ſtopniowi $m-1$. Aże zrównanie (D) wypadło s przypádku ſzczególnégo zrównaniá (C), który w rozwiązaniu powinien był bydź ogarniony, ieżeli to było tak ogólné iakéśmy mówili, i iak ſama natura umieiętności wyciągá; więc rozwiązanie zrównaniá ſtopnia $m-1$, ieſt zawarté w ſtopniu m. To rozwiązanie ſtopnia $m-1$ lubo będzie ſzczególnym przypádkiém ſtopnia m, będzie iednak co do ſwégo ſtopnia w ſamym ſobie zważanégo tak ogólné iak piérwſzé, a zatém ogarniać znowu powinno wſzyſtkié ſzczególné przypádki mogącé bydź wprowadzoné w zrównanie (D): ieżeli w niém uczyniémy $i=o$; ieſzcze prawidła ſtopnia $m-1$ będą ſłużyć té ſamé w takowéy odmianie. Ale w tém przypuſzczeniu zrównanie (D) będzie rozdzielné przez x, i zamieni ſię na:

$$x^{m-2}+px^{m-3}+qx^{m-4}+rx^{m-5}+ \text{ i t. d. } +h=o \quad (E).$$

to zrównanie ieſt ſtopnia $m-2$, na którégo rozwiązanie trzeba prawideł temu ſtopniowi właściwych. Te prawidła wypadną s tych któré zrównaniu ſtopnia $m-1$ ſłużyły, a zatém rozwiązanie ſtopnia $m-2$ zawarté ieſt w ſtopniu $m-1$ a tém ſamém w ſtopniu m. Ieżeli ieſzcze w zrównaniu (E) uczyniémy $h=o$,

otrzy-

otrzymámy zrównanie znowu rozdzielné przez x, po którém rozdzieleniu wypadnie

$x^{m-3}+px^{m-4}+qx^{m-5}+rx^{m-6}+$ i t. d. $+g=o$. (F)

To zrównanie będąc ſtopnia $m-3$ nie będzie ſię mogło rozwiązać tylko ſpoſobém tému ſtopniowi ſłużącym; który że znowu ieſt przypádkiém ſzczególnym ſtopnia $m-2$, lubo ſám w ſobie i w porównaniu niżſzych ſtopni będzie barzo ogólnym; zaczém rozwiązanie ſtopnia $m-3$, zawarte ieſt w ſtopniu $m-2$, té obydwa w ſtopniu $m-1$, a wſzyſtkié razém w ſtopniu m. S tąd nám wypadá ta wielká práwda: że rozwiązanie ogólné zrównaniá iakiégókolwiek ſtopnia, zamyká w ſobie rozwiązanie wſzyſtkich ſtopni niżſzych: aże każdy ſtopień má ſobie właściwé piérwiáſtki nacechowané w ilościach znanych przyzwoitym ſobie znakiém, rozwiązanie to w ſwym piérwiáſtku zamykać muſi znaki piérwiáſtkowé wſzyſtkich ſtopni niżſzych. Pokáże nám ſię ta práwda w drugim ſtopniu, ieżeli w iego piérwiáſtkach uczyniémy oſtatni termin zrównaniá zero, ieden nám bowiem piérwiáſtek zniknie, a drugi da rozwiązanie piérwſzému ſtopniowi ſłużące.

Gdybyśmy więc mieli ſpoſób na rozwiązanie ſtopnia m, mielibyśmy przez to prawidła na wſzyſtkié zrównaniá, i Algebra doſiągłaby ſzczytu ſwéy doſkonałości. Ale ieſzcze nieżmiernie ieſteśmy od tego odáleni. Niżeli przyidziémy do poznaniá granic náſzéy nauki, obróćmy wprzód uwágę na ſiebie, iakeśmy daleko w naſzych dociekaniach dotąd poſtąpili. Cálá naſza ſztuka rozwięzywaniá zrównań ſkończyła ſię na drugim ſtopniu, chcąc dosiąc ſtopni wyżſzych, potrzebaby nám każdy przywieśdź do tych, s którémi umiémy ſię obchodzić: albo na każdy w ſzczególności wynaydować prawidła i ſpoſoby z wiadomości dotąd nabytych. Doświádczmy ieſzcze niektórych, któré nám poznané dotąd właſności zrównań poddać mogą.

§. XXI.

Własność ostatniego termi- nu zamyka sposób na rozwiązanie zrównania.

Powiedzieliśmy byli, że ostatni termin zrównania iakiegokolwiek, iest mnogością ze wszystkich pierwiastków, więc rozebrawszy go na mnożniki, moglibyśmy pomiędzy niemi odkryć te, które są pierwiastkami zrównania: kładąc bowiem każdy s takowych mnożników za x w zrównanie, ten któryby go przywiodł do zero, byłby iego pierwiastkiem. Ten sposób rozwiązania zrównań byłby zaiste powszechny na wszystkie iakiegokolwiek stopnia, gdybyśmy byli w stanie rozebrania iakieykolwiek liczby na swych mnożników. Ale że nasze wiadomości Arytmetyki nie rościągaią się ieszcze tak daleko: mamy liczby niewymierne i *pierwsze (a)* w których takowy sposób rządkoby się udał. Może on bydź użyty, ale tylko prawie w samych zrównaniach maiących pierwiastki wymierne. I w tych nawet ma swoie niepzyzwoitości: każdego bowiem mnożnika należy doświadczać dwa razy, to iest biorąc go dodatnie i odiemnie, czyli ten przywiedzie zrównanie do zero lub nie? Niechże liczba iaka rozbierze się na barzo wiele mnożników, działanie przypadnie pracowite a często bezskuteczne. Ieżeli ieszcze do mnożników całkich przydamy ułomkowe, liczba ich może bydź bez końca, i na ten czas kuszenia nasze ledwo bydź mogą kiedy szczęśliwe. Chąc zatem użyć tego sposobu w iakiem zrównaniu, należy się wprzód upewnić czyli to zamyka pierwiastki ułomkowe lub nie? Nad to zaś nic łatwieyszego, bo ieżeli naywyższa potęga ilości nieznaney iest bez współ-czynnika liczebnego, a przytem wszystkich innych terminów współ-czynniki całkie; Arytmetyka sama nas uczy, że pierwiastek takowego zrównania nie może bydź ułomkowy, bo gdyby był takim, nie mogłby był mianownik zniknąć tylko stawszy się wszystkim terminom powszechny, a zatem naywyższa potęga ilości nieznaney byłaby była przez iaką liczbę rozmnożona. Wszakże ten

(a) Liczby pierwsze nazywaią się w Arytmetyce, które nie maią innych dzielników prócz siebie samych i iedności.

ten mianownik który służy x, musi bydź odmiennym w x^2 w x^3 i t. d. Prawda: że zrównania maiące współ-czynniki ułomkowe, przerobić się łatwo mogą na inne współ-czynników całkich: wziąwszy bowiem za ilość nieznaną, inną rozdzieloną przez iaką liczbę, i włożywszy ią w zrównanie, wszystkie współ-czynniki staną się całkiemi, n. p. niech będzie zrównanie. $x^3+\frac{a}{b}x^2+\frac{b}{c}x+\frac{d}{e}=o$, kładąc za x, $\frac{y}{m}$; przerobiemy zrównanie podane na - - $\frac{y^3}{m^3}+\frac{ay^2}{bm^2}+\frac{by}{cm}+\frac{d}{e}=o$ - - czyli $y^3+\frac{am}{b}y^2+\frac{bm^2}{c}y+\frac{dm^3}{e}=o$. ieżeli więc m iest rozdzielne razem przez b, c, e; współ-czynniki $\frac{am}{b}$, $\frac{bm^2}{c}$, $\frac{dm^3}{e}$ będą całkiemi: a choćby nawet b, c, e, były liczbami pierwszemi, wziąwszy $m=bce$ wszystkie terminy staną się rozdzielne: w przypadku zaś gdy b, c, e, nie są pierwszemi, m może bydź liczba mała, która zadosyć uczyni pytaniu.

Widzemy więc, że rozwiązanie zrównań maiących pierwiastki wymierne, zawisło od rozbioru ostatniego terminu na swoie mnożniki całkie; to pytanie co do niektórych szczególnych przypadków rozwięzuie Arytmetyka. Nie chcemy go tu powtarzać, bo naprzód mało wchodzi w nasz zamiar; oprócz tego ten sposób nadto iest ograniczony i nadto pracowity, abyśmy się nad nim zastanawiać mieli; wolemy raczey zostawić uwagę naszę ogólnieyszym w tey materyi badaniom. Obiaśniymy go iednak choć w iednym przykładzie: Niech będzie do rozwiązania zrównanie 3go stopnia - - $x^3-17x^2+79x-63=o$, ostatni termin ma za dzielników liczby $1, 3, 7, 9, 21, 63$, s których $1, 7, 9$, włożone za x, przywodzą zrównanie do zero, więc $x=1, x=7, x=9$, są pierwiastkami zró-

wnaniá podanégo. Gdyby liczba iaká zamykała nieskończoną nawet liczbę mnożnikow; między témi tyle tylko bydź musi takich, któré przywodzą zrównanie do zero, ile wykładnik stopnia má w sobie iedności. Gdybyśmy przez kuszeniá naszé choć przynáymniéy ieden tylko wynaleźli piérwiástek, zyskuiemy iefzcze i tak na naszéy prácy, bo rozdzieliwszy przezeń zrównanie, zniżámy ié o ieden stopień; maiąc dwa pierwiástki, i rozdzieliwszy przez nie zrównanie, zniżémy ié o dwa stopnie, a tak n. p. od 3go stopnia przyidziémy do 2go lub do piérwszégo, któré umiémy rozwiązać.

§. XXII.

Wyrzucenie terminu iakiégokolwiek w zrównaniu.

Mówiąc o zrównaniach 2go stopnia widzieliśmy, że té prawidła, któré im służyły, mogą iefzcze służyć w niektórych zrównaniach wyższych ogołoconych s pewnych terminów: tu znowu w §. 19. dostrzegliśmy że gdyby zrównanié iakié možná przerobić tak, aby w niém ostatniégo terminu brakowało, zniżyłoby się o ieden stopień, przez tę sztukę moglibyśmy każdé zrównanie przywieśdź do tuż ié poprzedzaiącégo. Obie té uwagi powinnyby nám poddać takowé pytanie: Czyby w zrównaniu iakiémkolwiek nie možná wyrzucić iakiégo tylko chcémy terminu, bez naruszeniá związku; abyśmy przez to wyrzucenie zrównanie naszé mogli przywieśdź do prawideł znanych, lub przynáymniéy uczynić ié prościéyszém? Na rozwiązanie tego pytaniá mámy iuż sposoby wyżéy podané pod §. 9: wprowadziwszy bowiem drugą niewiadomą będziémy mieli prawo czynić przypuszczenie iakiégo pytanie naszé wyciągá. Niech będą zrównaniá podané:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \quad - \; - \; - \quad x^4+px^3+qx^2+rx+s=0.$$

uczyniwszy $x=y+m$, m będąc drugą niewiadomą, zrównaniá podané odmiéniémy na;

$$\left.\begin{array}{l} x^3+3m.y^2+3m^2.y+m^3 \\ \quad + a. \quad + 2m. \quad +am^2 \\ \qquad\quad + b. \quad + m \\ \qquad\qquad\quad + c \end{array}\right\} = 0.$$

y^4+

$$\left.\begin{array}{lllll} y^4+4m.y^3 & +6m^2.y^2 & +4m^3.y & +m^4 & \\ \quad + p. & +3pm. & +3pm^2. & +pm^3 & \\ & \quad + q. & +2qm. & +qm^2 & \\ & & \quad + r. & +rm & \\ & & & +s & \end{array}\right\} = o.$$

chcąc teráz wyrzucić którykolwiek nám fię podobá termin z zrównaniá podanégo, nie zoftaie nám, tylko tego terminu wfpół-czynnika w zrównaniu przerobionéim uczynić zero; co nám dá zrównanie warunkowé fłużącé na oznaczenie nowéy wprowadzonéy nieznanéy m, przez wfpół-czynniki znané a, b, c, albo p, q, r, s. W piérwfzém zrównaniu chcąc wyrzucić drugi termin, wypadnie $3m+a=o$; chcąc trzeci termin wyrzucić, otrzymamy $3m^2+2ma+b=o$, na oftatni termin przypadnie $m^3+am^2+m+c=o$ - - podobnie náleży uczynić w zrównaniu drugiém: na drugi termin $4m+p=o$; na trzeci $6m^2+3pm+q=o$, na oftatni $m^4+pm^3+qm^2+rm+s=o$.

Widzémy więc oczywiście, że na wyrzucenie 2go terminu w iakiémkolwiek zrównaniu podaném trzeba nám rozwiązać zrównanie 1go ftopnia; na wyrzucenie 3go terminu, zrównanie 2go ftopnia; na wyrzucenie 4go terminu zrównanie 3go ftopnia, aby wynaleśdź m; na wyrzucenie więc oftatniego terminu trzeba nám rozwiązać zrównanie tego famégo ftopnia, w którym fię znayduie zrównanie podané; co nás prowadzi do takiéy faméy trudności iakąśmy ufiłowali zwyciężyć. Wfzyftkie przeto fpofoby które fpoftrzegliśmy w właſnościach zrównáń do ich rozwiązaniá, albo są niedoftateczné, albo nás rzucaią na té famé trudności które znaleźliśmy na piérwfzym wftępie. Prawda atoli którąśmy dopiéro odkryli nadgrádzá fwą pięknością nafzé kufzeniá.

Wyrzucenie 2go terminu zawifło w piérwfzém zrównaniu od $3m+a=o$, co daie $m=-\frac{a}{3}$; w drugiém zrównaniu $4m+p=o$ $m=-\frac{p}{4}$, gdybyśmy byli wzięli zrównanie:

 x^n+

$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+$ i t. d. $+k=o$ - - znależlibyśmy byli że wyrzucenie w niém *2go* terminu zawiſło od zrównaniá $mn+p=o$, co daie $m=-\frac{p}{n}$; to ieſt: że chcąc wyrzucić z iakiégokolwiek zrównaniá *2gi* termin, náleży wziąść za iego niewiadomą inną, dodáwſzy do niéy wſpół-czynnika *2go* terminu ze znakiém przeciwnym, rozdzielonégo przez wykładnika ſtopnia: takim ſpoſobém, zmniéyſzémy iednym terminém zrównanie podané nie naruſzywſzy w niém związku.

§. XXIII.

Z właſności zrównáń wyciągá ſię dowód wzoru Newtona.

Kiedy więc ſpoſoby w właſnościach zrównáń doſtrzeżoné nie udały nám ſię na ich rozwiązanie ogólné, zoſtáwmy té badaniá na potém, a teráz wróciwſzy ſię ieſzcze do zrównáń na początku §. 19. z mnożeniá wyciągnionych, uczyńmy w nich wſzyſtkié piérwiáſtki rowné, to ieſt $a=b=c=d=e$ i t.d. zrównaniá naſzé odmienią ſię na różné potęgi, i tak otrzymámy

z piéwſzégo - - - $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3=(x-a)^3=o.$

\- - - - $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=(x+a)^3=o$

z drugiégo - - $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4=(x-a)^4=o$

\- - $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4=(x+a)^4=o.$

Gdybyśmy byli roſtrząſali wyżſzych ſtopni zrównaniá, pokázałyby nám ſię z nich w teraźniéyſzém przypuſzczeniu wyżſzé potęgi, które wſzyſtkié razém podaią nám dowód tych práw, któréśmy tylko s ſamégo rachunku w potęgach wielo-kſztáłtnych (*multiformes*) doſtrzegli. Teoryá bowiem ogólná zrównáń dopiéro ſpoſtrzeżoná uczy nás, że wſpółczynnik *2go* terminu zamykać powinién ſummę wſzyſtkich wártości x, gdy té wártości wſzyſtkié ſą między ſobą równé, iedna z nich tylé razy bydź powinna powtórzoná, ilé má iedności wykładnik náywyżſzéy ilości niewiadoméy. Przeto ieżeli m ieſt ten wykładnik; ponieważ tylé bydź powinno piérwiáſtków zrównaniá;

powinno toż ſamo m bydź wſpół-czynnikiem drugiego terminu. *Powtore*: Mnogości z dwóch na ráz pierwiáſtków odmienią ſię każdá z oſobna na a^2; mnogość każda s trzech pierwiáſtków na a^3, i t. d; przeto wſpół-czynnik trzeciego terminu zamykać powinien a^2 tyle razy powtorzone, ile pierwiáſtki a, b, c, i t. d. mnożone po dwa na ráz, wydadź mogą mnogości różnych. Wſpół-czynnik czwártego terminu zamykać powinien a^3 tyle razy, ile też ſame pierwiáſtki dadzą mnogości różnych, mnożąc ie po trzy ná ráz, i t.d. Więc dla oznaczeniá trzeciego, czwartego, piątego, $m$go terminu wiedzieć náleży, wiele m liter dadź może różnych mnogości, mnożąc ie po dwie, po trzy, po cztery, i t.d. na ráz.

Nie ieſt zaś trudno doſtrzec, iż maiąc m liter, i układaiąc ich po dwie, po trzy, po cztery, i t. d. między ſobą, przez wſzyſtkie które ſię tylko wynaleśdź mogą położeniá; nie ieſt mowię trudno doſtrzec, że:

Naprzód: Liczba kombinacyi układaiąc ich po dwie, będzie dwa razy większá od liczby mnogości różnych, mnożąc ich po dwie. Maiąc bowiem dwie litery a, b, możná z nich zrobić dwa porządki ab, ba; ale te dwa porządki nie czynią tylko iednę też ſamę mnogość.

Powtore: Liczba porządków kombinuiąc kilka liter po trzy, ieſt ſześć razy większá od liczby mnogości różnych, mnożąc ie po trzy. Ułożywſzy bowiem n.p. trzy litery a, b, c, we wſzyſtkie mogące ſię wynaleśdź porządki, mám ſześć kombinacyi, abc, acb, cab, bac, bca, cba; mnogośc ich atoli ieſt tylko iedna. Tymże ſamym ſpoſobem poſtępuiąc, doſtrzeżemy, że cztery n.p. ilości mogą mieć 24 kombinacyi, wſzyſtkie atoli nie czynią tylko iednę mnogość. Podobnie, liczba kombinacyi wielu liter po pięć na ráz, ieſt ſto dwadzieścia razy większá od liczby mnogości; i t. d. A co na iedno wynidzie: że liczba mnogości z dwóch

na ráz liter ieſt $= \frac{licz:\ kombin:}{1.\ 2}$; liczba mnogości ró-żnych s trzech na ráz liter $= \frac{liczb:\ kombin:}{1.\ 2.\ 3}$: s czte-rech liter $= \frac{liczb:\ kombin:}{1.2.3.4}$: s piąciu liter $= \frac{liczb:\ kombi}{1.2.3.4.5}$ i t. d. to ieſt ogólnie mowiąc: że liczba mnogości z ilekolwiek liter, ieſt równá ułomkowi, którego licznik pokazuie liczbę kombinacyi, a mianownik mnogość z liczb naturalnych 1. 2. 3. 4. 5. i t. d. aż do téy, która oznaczá z wielu liter ſkładá ſię mnogość. Zebyśmy więc znaleźli wzór ogólny na wyrażenie każdégo wſpół-czynnika w potędze dwówyrazowéy, wiedzieć nám teráz náleży liczbę kombinacyi złożonych z m liter, układaiąc ie po dwie, po trzy, po cztery i t. d. Zaſtanówmy ſię nad tém dociekaniém:

Maiąc m liter i chcąc ich układać po dwie na ráz, ponieważ iedna litera nie może ſię kombinować ſama s ſobą, oczywiſtá ieſt rzecz, że ieſt $m-1$ liter do kombinowaniá z nią; więc ta iedna litera da $m-1$ kombinacyi; a ponieważ ieſt m liter, więc będzie $m.\overline{m-1}$ kombinacyi. Przeto liczba mnogości różnych z dwóch na ráz liter, wyrazi ſię przez $m.\frac{m-1}{1.2}$.

Chcąc kombinować po trzy na ráz litery; potrzeba, aby każdá kombinacyá z dwóch liter układała ſię s każdą inną literą którey nie zamyká, to ieſt z liczbą liter wyrażoną przez $m-2$; przeto każdy z oſobna porządek z dwóch liter wyda $\overline{m-2}$ kombinacyi s trzech liter; więc ponieważ ieſt $m.\overline{m-1}$ kombinacyi z dwóch liter, a każdá z nich wyda $\overline{m-2}$ kombinacyi s trzech liter; będzie wſzyſtkich kombinacyi s trzech liter. $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$; więc liczba mnogości

gości różnych s trzech liter wyraża się przez $m.\frac{(m-1)(m-2)}{2.\ 3}$

Ciągnąc daléy to ſamo rozumowanie, znaydziémy, że liczba kombinacyi s czterech liter wyraża się przez $m(m-1)(m-2)(m-3)$; ponieważ należy każdą kombinacyą s trzech liter ułożyć z inną czwártą, któréy ona nie zamyka, a zatém zoſtaie $m-3$ liter do kombinowaniá s każdym porządkiem tróy-literanym; doſtanie się więc na każdego $m-3$ kómbinacyi; ażeieſt $m(m-1)(m-2)$ takowych porządków; wypadá $m(m-1)(m-2)(m-3)$, kombinacyi po cztery na ráz litery. Zaczém liczba mnogości różnych wyraża się przez $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$. Tym ſpoſobém dowieśdź łatwo, że liczba mnogości s pięci liter, równá ieſt, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, s ſześciu liter $=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$, i t. d. Wnieśmy więc s tych wſzyſtkich uwág; że potęga m dwówyrazowéy ilości $x\pm a$ tak się wyraża ogólnie:

$$(x\pm a)^m = x^m \pm max^{m-1} + m.\frac{m-1}{1.\ 2}a^2x^{m-2} \pm m\frac{(m-1)}{1.2.}\frac{(m-2)}{3}a^3x^{m-3} + m.\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4x^{m-4} \pm \text{ i t. d.}$$

Przyszliśmy więc do ściſłego dowodu wzoru *Newtona*, którego nieſkończoné ieſt użycie po całéy Matematyce i Fizyce. Mógłby nám kto zarzucić, że wzór do odwikłaniá funkcyi ſłużący, nie zawieraiący żádnégo związku dowiedliśmy przez teoryą zrównań, a przeto prawdę ogólną przez ſzczególną, ale zatrzymáwſzy się myślą nad wielką ogólnością zrównań tu przyſtóſowanych przyznámy, że té wyrażaiąc iakikolwiek związek wſzyſtkich razém ilości w

funkcyi zamkniętych, ani będąc do żadnych ſzczegól-nych związków między terminami przywiązané, ros-ciągaią ſwoié właſności do zrównań TOSAMYCH (*identica*), do których należéć mogą wſzyſtkié wzory na ſwé terminy odwikłane, a zatém i teraźnieyſzy. Oprócz tego właſności zrównań, któré nám tu do te-go dowodu ſłużyły, nie ſą zagruntowané na konie-cznym związku ale raczéy na ſkładzie funkcyi w zró-wnanie wchodzących. S tego owſzem przykładu po-kazuie ſię ieſzcze iaśniéy to, cośmy iuż wyżéy do-ſtrzegli, iak ieſt ściſła wzaiemność między zrówna-niami, i funkcyami im odpowiadaiącémi; iak doſko-nałość iednych wpływá w doſkonałość drugich, iak nakoniec iedné obiaśniaią i dowodzą drugié, w czém iednak należy nám bydź barzo oſtrożnémi na całość práw geometrycznych, któré nám nakazuią nayści-śléyſzé przeſtrzéganie ogólności początków.

Należy nám tu tylko to ieſzcze uważyć, że cały dowód teraźniéyſzégo wzoru tak ieſt roſporządzony, iż iedén iego termin dowodzi ſię przez drugi poprzé-dzaiący. Zoſtaie nám więc ieſzcze takową znaleśdź demonſtracyą, którąby ſłużyła na każdy termin bez żádnéy zawiſłości od innych, ale tak rozległá ogól-ność ſkładaiącá całą piękność matematycznych począ-tków będzie dopiéro w mocy wyżſzych matematyki części.

Użycie wzoru Newtona ros ciągnioné do potęg iakich-kolwiek wy-kładników.

Zatrzymáymy ſię teraz nad różném przerobieniém naſzégo wzóru i iego użyciém: maiąc wzgląd na ilość z wykładnikami odiemnémi, przekonámy ſię, że wzór Newtona tak ſię może wyrazić:

$$(x \pm a)^m = x^m \left(1 \pm m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\frac{a^2}{x^2} \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3.}\frac{a^3}{x^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\frac{a^4}{x^4} \text{ i t. d. }\right) = x^m\left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^m,$$

który wyráz ſłużyć nám będzie niżéy.

Nie

Nie potrzeba nám zaś zapomnieć że tén wzór funkcyi dwó-wyrazowéy prowadzi nás do podobnégo wynoszeniá funkcyi wielo-wyrazowych trzymaiąc się sposobu braniá kilku terminów za ieden wyżéy wyłożonégo. Nadarzá nám się tu iedno pytanie: czyli odwikłanie funkcyi dwo-wyrazowéy podług wzoru Newtona oznaczonéy wykładnikiém całkim i dodatnym, rosciągnąć się może do funkcyi z wykładnikiém ułomkowym i odiemnym; to iest: czyli té samé prawa któré nám służą do wyrażeniá $(x \pm a)^m$, służyć nám iescze mogą do wyrażeniá $(x \pm a)^{\frac{m}{n}}$ lub - - - - $(x \pm a)^{-p}$, p będąc ułomkiém lub liczbą całką. Dowód którysmy wyżéy wyłożyli, nie pokazuie nám tego; wáżną atoli iest barzo rzeczą rostrząsnąć czyli prawda nie daléy się rosciąga niżeśmy ią ogarneli, a upowszechnienie naszych myśli byłoby tego rostrząsaniá pierwszym nasámprzód skutkiém. Oprocz tego wynikłyby s tego inné iescze pożytki, któré powinniśmy łatwo zgadnąć s poprzedzaiących wiadomości. Iakimże się tedy sposobém o tym domyśle zapewnić? Owóż iedén, który nám się tym czasém nadarzá:

Przypuśćmy że to, o czém się domyślámy, iest práwdą, i wyraźmy $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ podług práw wyższych, wypadnie nám:

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\frac{a^4}{x^4}+ \text{i t. d.}\right) \qquad (P)$$

wszystkié terminy następuiące w tym szeregu po iedności, nazwiymy p, a wzór nasz zamieni się na $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}(1+p)$, wyniósłszy obydwa członki do potęgi n, będzie: $(x+a)^m = x^m(1+p)^n$ zrównanie tosamé: ieżeli więc $x^m(1+p)^n$ rozwiązáwszy, i przywroci-

wſzy p ſwoię wártość, otrzymámy takié ſamé termíny, iakié nám wyżéy dał wzór $(x+a)^m$; znakiém będzie, że wzór Newtona prowadząc do wypádków prawdziwych, rosciągá ſię ieſzcze na wykładniki ułomkowé dodátné. Rachunek powinién nás o tém przekonać: doświádczmy go:

$$(1+p)^n = 1+np+n.\frac{(n-1)}{2}p^2+n.\frac{(n-1)(n-2)}{2.\quad 3}p^3 +n.\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\quad 3.\quad 4}p^4 + \text{i t. d.} \quad - \quad - \quad (A)$$

$$p = \frac{m}{n}.\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\frac{a^4}{x^4}+\text{i t. d.}$$

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2}.\frac{a^2}{x^2}+2\frac{\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\frac{a^3}{x^3}+\text{i t. d.}$$

$p^3 = \frac{m^3}{n^3}.\frac{a^3}{x^3}+$ i t. d. té wſzyſtkié wártości różnych potęg p, położywſzy za p, p^2, p^3 i t. d. w wzorze (A), i ułożywſzy terminy podług potęg $\frac{a}{x}$, wypadnie:

$$1+m.\frac{a}{x}+\frac{m\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{i t.d.}$$

$$+\frac{m^2}{n}\left(\frac{n-1}{2}\right)+\frac{\frac{2mm}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2}+\text{i t.d.}$$

$$+\frac{m^3}{n^2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)+\text{i t.d.}$$

wykonáwſzy mnożenie wſzyſtkich wſpół-czynników, i wymazáwſzy terminy wzaiemnie ſię znoſzącé, otrzymámy

mámy za wſpół-czynnika iłości $\frac{a^2}{x^2}$, $m\frac{(m-1)}{2}$; $m.\frac{(m-1)}{2}.\frac{(m-2)}{3}$ za wſpół-czynnika $\frac{a^3}{x^3}$ i t.d. a przeto wzór Newtona przyprowádzá nás do tak pewnych wypádków w potęgach wykładników ułomkowych dodátnych iak i w wykładnikach całkich.

Co ſię zaś tycze wykładników odiemnych n. p. $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$, połóżmy $(x+a)^{-\frac{m}{n}}=Q$ - - $1=Q.(x+a)^{\frac{m}{n}}$; ieżeli rozebráwſzy te funkcye podług wzoru Newtona trafiémy na takié wypádki, iakié nám to zrównanie pokazuie, pewni bydź możémy, że wzór Newtona rosciągá ſię nawet do funkcyi z wykładnikami odiemnémi. Doświadczmy trzech przynáymniéy początkowych terminów.

$$(x+a)^{-\frac{m}{n}}=x^{-\frac{m}{n}}\left(1-\frac{m}{n}\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}\frac{a^2}{x^2}-\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}\frac{\left(\frac{m}{n}+2\right)}{3}\frac{a^3}{x^3}+\text{i t.d.}\right) \quad - - \quad (Q)$$

$$(x+a)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}.\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.2}\frac{\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3}\frac{a^3}{x^3}+\text{i t. d.}\right)$$

rozmnożywſzy piérwſzy ſzereg przez drugi, i ſtanąwſzy przynáymniéy na wſpół-czynniku $\frac{a^3}{x^3}$, otrzymámy:

$$x^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\left(1-\frac{m}{n}.\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}-\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m}{n}+2\right)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3}\right.$$

$$+\frac{m}{n}.\frac{a}{x} \quad - \quad \frac{m^2}{n^2}\frac{a^2}{.x^2} \quad + \quad \frac{\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}\frac{a^3}{x^3}$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}\frac{a^2}{x^2} - \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{a^3}{x^3}$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}$$

wykonáwszy cały ten rachunek, który tu iest naznaczony, otrzymámy terminy wszystkie wzaiemnie się znoszącé, tak dalece; że cały szereg będzie równy iedności, podług zrównaniá $1=Q(x+a)^{\frac{m}{n}}$. Pewni więc iesteśmy, że wzór Newtona rosciąga się do funkcyi iakichkolwiek wykładników całkich lub ułomkowych, dodátnych lub odiemnych. Dowód więc tén którysmy wyżéy z teoryi zrównáń i kombinacyi wyciągli, lubo się zdáwał ogólnym, iest iednak szczególnym barzo, bo się tylko rosciągá do samych wykładników całkich dodatnych. Té zaś ostatnie dowody są raczéy doświadczeniami rachunku, niżeli ścisłémi dowodami Matematycznémi; zaczém zostaie nám ieszcze do wyższych części taki dowód wzoru Newtona, któryby się swą ogólnością rosciągnął do wszystkich iakichkolwiek wykładników.

Stósowanie wzoru Newtona do wyciągania pierwiástku w potęgach iakichkolwiek.

Ponieważ wykładniki ułomkowé oznáczaią zawsze wyciąganie pierwiástków; przeto wzór Newtona służy nám nie tylko do wynoszenia funkcyi do potęg iakichkolwiek, ale nawet do wyciągania pierwiástków s funkcyi zupełnych i niezupełnych. Té ostatnié, ponieważ nigdy nie prowadzą do wyrazu skończonégo, zaczém pasmo terminów w potęgach niezupełnych pociągnie się bez końca, i dá to, co nazywaią SZEREGIEM (*Series*). Ieżeli w tym szeregu terminy tém się barziéy zmnieyszaią im są odległéysze, to iest, kiedy $\frac{a}{x}$ iest práwdziwym ułomkiém; Szeregi nazywaią się MALEIĄCEMI (*Convergentes*); ieżeli zaś té terminy tém się barziéy powiększaią im

się

ſię daléy ciągną, to ieſt, kiedy $\frac{a}{x}$ ieſt liczbą cáłką lub ułomkiem fałſzywym, nazywaią ſię WZRASTAIĄCEMI *(Divergentes)*.

Trafiliśmy iuż na dwa gatunki funkcyi, które nás prowadzą do ſzeregów, a które biorą ſwóy początek w działaniach przywiązanych do pewnych kondycyi, iakie ſą dzielenie i wyciąganie pierwiáſtków. Ten rodzáy rachunku zatrzymá nás niżéy z większą obſzernością.

Wzory któréśmy podali na wykładniki ułomkowé, użyté bydź mogą w liczbach niewymiernych, kiedy nám w nich zachodzi wyciąganie pierwiáſtków n. p. chcąc znaleśdź wártość $\sqrt{101}$, potrzeba nám náſamprzód $\sqrt{101}$ przywieśdź do wyrazu takiégo, w iakim ſię znayduią naſzé wzory, to ieſt: do $100^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$, a uczyniwſzy w wzorze (P), $x=100$, $\frac{a}{x}=0,01$; $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ otrzymamy:

$$\sqrt{101}=10\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}+\frac{(0,01)^3}{16}-\frac{5(0,01)^4}{128}+\frac{35(0,01)^5}{1280}-\text{i t. d.}\right)$$

każdy s tych terminów zamieniwſzy na ułomek dziesiątkowy, i dodáwſzy ich razém, otrzymámy za wártość $\sqrt{101}$, liczbę bliſką $10,0498756$ i t. d.

Nie chcémy ſię bawić nad przykładami takowych działáń, bo każdy zrozumiáwſzy ogólné początki będzie w ſtanie ſám przez ſię w nich podług upodobaniá ćwiczyć ſię.

§. XXIV.

O liczbie pierwiáſtków rzeczelnych i uroionych w zrównaniu.

Nie zgubmy ſię w tych wycieczkach, do których nás wyciągnęły właſności ogólné zrównáń. Uważaliśmy iakiégokolwiek ſtopnia zrównanie, iako powſtaiącé z zrównáń pierwſzégo ſtopnia przez ſiebie rozmno-

rozmnożonych, możémy ié więc ieſzcze uważać iako powſtaiącé z zrównań innych ſtopni od ſiebie niżſzych, byleby tak dobranych; aby z ich mnogości wypaśdź mogło zrównanie podané; i tak zrównanie 3go ſtopnia możémy uważać iako powſtaiącé z zrównaniá 2go ſtopnia przez zrównanie 1go; zrównanie 5go ſtopnia, iako powſtaiące z zrównania 3go ſtopnia przez zrównanie 2go rozmnożoné, i t. d. Ieżeli będziémy uważać zrównaniá wyżſzé iako powſtaiącé z zrównaniá 2go ſtopnia; ponieważ té mogą zamykać piérwiáſtki uroioné, zrównaniá także wyżſzych ſtopni będą mogły zamykać tylé pár piérwiáſtków uroionych, ilé w ich ſkład wchodzi zrównań 2go ſtopnia. Zaczém zrównaniá ſtopni párzyſtych będą mogły miéć wſzyſtkié piérwiáſtki uroioné, ſtopni zaś niepárzyſtych muſzą mieć koniecznie przynáymniéy iedén piérwiáſtek rzetelny.

Uważaiąc iakiégokolwiek ſtopnia m zrównanie, iako powſtaiące z zrównań 2go ſtopniá; tych zrównań tylé tylko wchodzić może za mnożników w zrównanie m, ile razy 2 zamyká ſię w wykładniku ſtopnia. Ale ponieważ zrównanie ſtopnia m, zamyká m piérwiáſtków, z nich tylé możémy ułożyć zrównań 2go ſtopnia, ilé razy kombinować możémy m piérwiáſtków, biorąc ich po dwa na ráz, to ieſt $m.\frac{m-1}{2}$. Każdé więc zrównanie ſtopnia m wydadź może $m.\frac{m-1}{2}$ Zrównań 2go ſtopnia, ale takowych zrównań nie wchodzi w iego ſkład tylko liczba $\frac{m}{2}$: gdybyśmy więc chcieli wyrazić przez zrównanie $x^2+ax+b=0$ wſzyſtkie zrównania 2go ſtopnia, któré tylko wydadź może zrównanie ſtopnia m, potrzeba aby b będąc mnogością wſzyſtkich piérwiaſtków, tylé miało wártości, ilé wypaśdź może kombinacyi z m piérwiáſtków, biorąc ich po dwa na ráz; zaczém

czém b musi bydź dané przez zrównanie ſtopnia m. $\frac{m-1}{2}$: toż ſamo trzymać mámy i o a, które ieſt ſummą piérwiáſtków. Podobné rozumowanie przekoná nás równie, że uważaiąc zrownanie m iako powſtaiącé z zrównáń $3go$ ſtopnia, i chcąc té wſzyſtkié zrównaniá $3go$ ſtopnia ogarnąć w zrównaniu $x^3+ax^2+bx+c=o$, musi c bydź dané przez zrównanie ſtopnia $m. \frac{(m-1)(m-2)}{2.\quad 3}$ ponieważ tylé wypadá kombinacyi z m piérwiáſtków biorąc ich po trzy na ráz, a zatém tylé złożyć możná zrównáń $3go$ ſtopnia, s których iednak nie wchodzi za mnożnikow w zrównanie ſtopnia m tylko liczba $\frac{m}{3}$. Wnieſie ſobie każdy iak náleży rozumować o zrównaniach wyżſzych ſtopni uważaiąc ié iako mnożniki ſtopniá m. Weźmy za przykłád zrównanie $4go$ ſtopnia na począku §. 19. położoné $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=o$, biorąc z iego piérwiáſtków po dwa na ráz, ułożémy ſześć zrównáń $2go$ ſtopnia, s których każdé dwa rozmnożoné przez ſię, dadzą zrównanie czwártego ſtopnia podané; to ieſt:

$(x-a)(x-b)$	rozmnożoné przez	$(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-c)$	- - -	$(x-b)(x-d)$
$(x-a)(x-d)$	- - -	$(x-b)(x-c)$
$(x-b)(x-c)$	- - -	$(x-a)(x-d)$
$(x-b)(x-d)$	- - -	$(x-a)(x-c)$
$(x-c)(x-d)$	- - -	$(x-a)(x-b)$.

Gdybyśmy doszli ſpoſobu rozebraniá zrównáń iakiégokolwiek ſtopnia na zrównaniá pierwſzégo lub drugiégo, które iuż umiémy rozwiązać, przyſzlibyśmy do prawideł na wynalezienie piérwiáſtków każdégo zrównaniá. Nie możémy wątpić, że maiąc n. p. iedno przynáymniéy zrównanie $1go$ lub $2go$ ſtopnia wchodzącé

dzące w skład zrównania stopnia m, możémy przez nie to zrównanie rozdzielić i zniżyć ié do stopnia $m-1$, albo $m-2$. Bo maiąc n.p. zrównanie $x-a=o$, któré wchodzi w skład zrównania A ktorégokolwiek stopnia, tak dalece, że włożywszy w A, $x=a$, A przywiedzie się do zero; musi koniecznie A bydź zupełnie rozdzielné przez $x-a$. Wątpiémyż o tém? nazwiymy w zrównaniu A wszystkié inné piérwiástki oprócz $x-a$, Q; więc ieżeli A nie iest zupełnie rozdzielné przez $x-a$, wypadnie podług prawideł dzieleniá $\frac{A}{x-a}=Q+\frac{R}{x-a}$, R znacząc resztę z dzielenia pozostałą, a zatém $A=(x-a)Q+R$, uczyniwszy $x=a$, $(x-a)Q$ będzie zero; ale i A iest także na tén czás zero, podług piérwszégo przypuszczeniá, więc $R=o$, a przeto $\frac{A}{x-a}=Q$.

§ XXV.

Tłómaczy się potrzeba i sposób oswobodzeniá zrównań od znaków piérwiástkowych i od niewymierności.

Niżeli poydziémy daléy, uczyńmy tu krótką uwágę: każdy stopień zrównaniá má swoie właściwé do rozwiązaniá go prawidłá i własności z nich wynikaiącé, nie możémy więc poty przystąpić do rozwiązaniá iákiégokolwiek zrównaniá, poki się nie dowiémy o iego stopniu. Sądziemy zaś o stopniu iakiegokolwiek zrównaniá z wykładnika ilości nieznanéy, ieżeli wszystkié są całkié: ale ieżeli który z wykładników będzie łomany, przerwie się porządek, który w zrównaniach foremnych zachować zwykły wykładniki nieznanéy ilości: poty więc nie możémy bydź w stanie sądzeniá o stopniu zrównaniá, a zatém nie możémy przystąpić do rozwiązaniá onégo, poki wszystkich ilości nieznanéy wykładników nie przywiedziémy do całkich. Wykładniki ułomkowé pokazuią znaki piérwiástkowé w zrównaniu, któré iészcze i tę maią nieprzyzwoitość, że będąc przywiązané do wielorakich znaczeń wprawiaią nás w wątpliwość,

czyli

czyli wszystkie te znaczenia czyli tylko iedno, i które do naszego pytania należy. Iest więc rzeczą náypierwszą niżeli przystąpiémy do rozwiązania iakiegokolwiek zrównania, oswobodzić ie ze wszystkich znaków pierwiástkowych. Zatrudniymy się teráz tém działániém.

Wiémy, że znaki pierwiástkowe odpádaią wynosząc do téy saméy potęgi ilości pod niémi zawarte; dla tégo sposób, którégo tu użyiémy iest łatwy do zrozumienia iako wyciągniony s poprzedzaiących wiadomości. Iaśniéy on się pokáże w rachunku, niż gdybyśmy go słowy wykładali. Niech będą zrównania.

$x^2+a\sqrt{x}+m=0$ - - $x^3-\sqrt[3]{(x-a)}+d=0$ - - - - - -

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+xd+f=0.$

odbądźmy się z dwiéma pierwszémi nasámprzód:

$$a\sqrt{x}=-(x^2+m) \quad - - \quad x^3+d=\sqrt[3]{(x-a)}$$

$$a^2x=(x^2+m)^2 \quad - - \quad (x^3+d)^3=x-a, \text{ czyli:}$$

$$x^4+2mx^2-a^2x+m^2=0 \quad - - \quad x^9+3dx^6+3d^2x^3+d^3-x+a=0.$$

pierwsze więc iest czwártégo, á drugie dziewiątégo stopnia. Zrównanie trzecie, dwa zamyká znaki oddzielone, a zatém, dwoiakie takowe w niém zachodzi działánie: naprzód

$\sqrt[3]{x^2}=-(\sqrt{x}+xd+f)$ - - $x^2=-(\sqrt{x}+xd+f)^3$, a nazwáwszy $xd+f=p$; mámy, $x^2=-p^3-3p^2\sqrt{x}-3px-x\sqrt{x}$, czyli - - $x^2+p^3+3px=-(3p^2+x)\sqrt{x}$, $(x^2+p^3+3px)^2=(3p^2+x)^2x$. włożywszy w to ostatnie za p, $xd+f$; otrzymámy zrównanie szóstégo stopnia wymierne. Gdybyśmy więcéy ieszcze mieli znaków pierwiástkowych w zrównaniu, złączonych s sobą przez same znaki dodátne lub odiemne; działanie témby było trudniéysze, i ten sposób ieszczeby nám się nie zawsze udał. Użyimy przeto inszégo.

Oswobodzić zrównanie iakie od znaków pierwiá-

ſtkowych ieſt to tyle wprowadzić kondycyi do naſzego zrównania, ile ſię takowych znáków potrzebuiących oſobnego działania znayduie w zrównaniu. Wſzyſtkie te kondycye ściągaią ſię do tego aby te znaki znikły; nie mozná im więc inaczey uczynić zadoſyć, tylko wprowadziwſzy tyle innych nieznanych ilości, ile ſię liczy znaków pierwiáſtkowych w zrównaniu, podług §. 9. Ale iakże kilka nieznanych ilosci wprowadzić w iedno zrównanie, którego nie mámy s czem kombinować? Widzemy że początek §. 9. potrzebuie tu ſpoſobu nagięcia go do teraźnieyſzego przypádku. Ten ſpoſob ieſt barzo proſty. Uczyńmy każdy termin znak pierwiáſtkowy zamykaiący równy iedney nieznaney, przez co otrzymámy tyle zrównań, ile mámy znaków pierwiaſtkowych w zrównaniu; włóżmy potem wſzyſtkie nieznane na mieyſce niewymiernych w zrównanie podane; a każde s pierwſzych zrównań wynioſſzy do tey potęgi, którą znak pierwiáſtkowy oznaczá, otrzymámy liczbę zrównań $m+1$: ieżeli znaków pierwiáſtkowych liczba ieſt m. Te wſzyſtkie zrównania ſtaráymy ſię tak kombinować, aby z nich wſzyſtkie nieznane nowo wprowadzone wypadły. Przyidziemy tym ſpoſobem przez eliminacyą do zrównania pewnego ſtopnia zamykaiącego ſame terminy wymierne z iedną nieznaną. Niech będzie n.p. zrównanie:

$$x^2-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{d^2}+\sqrt{x}+g=0$$

czynię $\sqrt[3]{ax}=y$, - - $\sqrt[3]{d^2}=z$ - - $\sqrt{x}=u$, s kąd mám cztery zrównania:
(1) - - $x^2-y+z+u+g=0$ - - (2) - $ax-y^3=0$ - -
(3) - $d^2-z^3=0$ - - (4) - $x-u^2=0$
oſtatnie daie mi $x=u^2$; złączone z drugiem $ax=au^2$: te wártości włożone w (1) (2). daią mi dwa zrównania bez x

u^4-y.

$u^4-y+z+u+g=0$ - $au^2=y^3$, s piérwszégo otrzymám: $z=y-u^4-u-g$ - - $z^3=(y-u^4-u-g)^3=d^2$; czyli położywszy dlá skróceniá $u^4+u+g=p$; i wyniósłszy $y-p$, do potęgi trzeciéy

$$y^3-3y^2p+3p^2y-p^3-d^2=0 \text{ - - } au^2=y^3$$

dwa zrównaniá s których wyrzuciwszy y, otrzymámy zrównanie na u wymiérné: wystáwmy ié pod następuiącym wzorém nazwáwszy

$$3p=A, \text{ - - } 3p^2=B, -p^3-d^2=C, \; au^2=P.$$

$$y^3-Ay^2+By+C=0 \text{ - - } y^3-P=0.$$

za pomocą tych dwóch zrównáń potrzeba nám wyrzucić y, aby otrzymać zrównanie wymiérné z iedną tylko niewiadomą u. Na to wyrzucenie przepisy §. 7. nie mogą nám służyć; bo té rosciągaią się tylkó do ilości niewiadomych piérwszégo stopnia. Usiłuymyż teráz odkryć sposób wyrzuceniá z zrównáń ilości niewiadomych iakiégokolwiek stopnia, będąc do téy potrzeby porządnym ciągiém naszych myśli przywiedzeni.

§ XXVI.

Pamiętámy, że wyrzucanie ilości nieznanych 1go stopnia odbywaliśmy przez kombinacyą dwóch zrównáń, która kończyła się na tém, aby z dwóch zrównáń maiących spólną pewną nieznaną, otrzymać zrównanie bez téy nieznanéy. Zrównaniá więc w których takowé działanie zachodzi wyrazić możémy przez

Sposoby élimi nacyi na zrównaniá wyższych stopni.

$$a+bx=0 \text{ - - - } A+Bx=0.$$

gdzie, a, b, A, B, są funkcyami innych nieznanych. *Newton* w swoiéy Arytmetyce powszechnéy podał nám do tego sposób, o którym iuż namiéniliśmy byli, a którégo on użył aż do zrównáń 4go stopnia. Tén chociaż iest niedostateczny, godzién iednak przynáymniéy dlá historyi naszéy uwági.

Przyprowádzaiąc iedén termin w każdém zrównaniu do tegóż samégo wyrazu za pomocą mnożeniá

mogę w dwóch podanych zrównaniach albo wyrzucić a, A, i rozdzielić potém zrównanie przez x; albo téż zaráz wyrzucić bx, Bx. Na tén koniec mnożę piérwſzé przez A, drugié przez a, odciągám iedno od drugiégo i mám:

$$Abx-aBx=o \quad - \; - \quad Ab-aB=o.$$

albo mnożę piérwſzé przez B, drugié przez b i odciągnąwſzy ié od ſiebie otrzymám: - - $Ba-Ab=o$.

Niech będą podané dwa zrównaniá $2go$ ſtopnia:

$$a+bx+cx^2=o \quad - \; - \; - \quad A+Bx+Cx^2=o.$$

mnożę piérwſzé przez A, drugié przez a, i odciągám tamto od tego rozdzieliwſzy ié przez x; wypadnie:

$$Ab-Ba+(Ac-Ca)x=o.$$

powtóré mnożę piérwſzé przez C, drugié przez c, a ich rożnica będzie:

$$Ac-aC+(Bc-bC)x=o.$$

przyſzliśmy do dwóch zrównáń $1go$ ſtopnia s którémi obſzedłſzy ſię podług $1go$ przypádku przyidziémy do zrównaniá:

$$(Ac-Ca)(Ac-Ca)-(Bc-bC)(Ab-Ba)=o.$$

widzémy więc że eliminacyá w drugim ſtopniu przywiodła nás do oſtatniégo zrównaniá które ieſt $4go$ ſtopnia, tak iak w piérwſzym ſtopniu do zrównániá ſtopniá $2go$.

Maiąc podané dwa zrównaniá $3go$ ſtopnia:

$$a+bx+cx^2+dx^3=o \quad - \; - \quad A+Bx+Cx^2+Dx^3=o.$$

mnożę piérwſzé przez A; drugié przez a, i odciągnąwſzy ié od ſiebie przyidę do

$$Ba-bA+(Ca-cA)x+(Da-dA)x^2=o.$$

powtóré do wyrzuceniá oſtatnich terminów mnożę piérwſzé przez D, drugié przez d, a ich rożnica dá mi:

$$Ad-Da+(Bd-bD)x+(Cd-cD)x^2=o.$$

dwa té zrównaniá $2go$ ſtopnia chcąc kombinowáć

podług

podług poprzedzaiącego przypadku, nazywám dlá ułatwieniá rachunku

$$Ba - bA = A' \quad - - - \quad Ad - Da = a'$$
$$Ca - cA = B' \quad - - - \quad Bd - bD = b'$$
$$Da - dA = C' \quad - - - \quad Cd - cD = c'$$

a zrównaniá przerobioné wyrażą się tym prościéyszym sposobém:

$$A' + B'x + C'x^2 = o \quad - - - \quad a' + b'x + c'x^2 = o.$$

s tych dwóch zrównáń mnożę piérwszé przez a', drugié przez A', a różnica ich dá mi:

$$B'a' - b'A' + (C'a' - c'A')x = o.$$

mnożę powtóré piérwszé przez c', drugié przez C', i otrzymám z ich odciągnieniá: - - - -

$$A'c' - a'C' + (B'c' - b'C')x = o$$

nakoniec dlá ułatwieniá rachunku nazywám:

$$B'a' - b'A' = A'' \quad - - - \quad A'c' - a'C' = a''$$
$$C'a' - c'A' = B'' \quad - - - \quad B'c' - b'C' = b''$$

i dwa zrównaniá przerábiaiąc tym samym sposobém przyidę do ostatniégo:

$$A''b'' - a''B'' = o$$

któré iest ósmégo stopnia podług znaczeń liter, któréśmy im nadali. To atoli zrównanie ósmégo stopnia má iednégo mnożnika spolnégo wszystkim terminom $Ad - Da$, przez który rozdzielone wydá zrównanie *6go* stopnia·

$$\left.\begin{array}{l}(Ad - Da)^3 + (Ac - Ca)^2(Cd - Dc) - 2(Ab - Ba)(Ad - Da)(Cd - Dc) \\ \quad + (Bd - Db)^2(Ab - Ba) - (Ab - Ba)(Bc - Cb)(Cd - Dc) \\ \quad - (Ad - Da)(Ac - Ca)(Bd - Db)\end{array}\right\} = o$$

ciągnąc daléy rachunek dwa zrównaniá *4go* stopnia przywodzą nás náprzód do zrównaniá 16. stopnia, któré dobrze rostrząsnąwszy znáydziémy w niém mnożnika *8go* stopnia, rozdzielone więc przez niégo zniży się do stopnia ósmégo.

Przeto tén sposéb tę má w sobie nieprzyzwoitość, że nás wiedzie do mnożników nie náleżących bynáy-

H 3 mniéy

mnie'y do naſze'go zamiaru. W takowe' mnożniki obwikłane' zrównanie dá pie'rwiáſtki fałſzywe' ,które' pytaniá nie rozwiążą, bo mu ſą cale obce'. Nie maiąc więc ſpoſobu na rozróżnienie tych pie'rwiáſtków które' do pytaniá práwdziwie náleżą, od tych które' niedoſkonałość rachunku wciągnęła, ieſte'śmy w niebeſpieczéńſtwie trafieniá ná fałſzywe' rozwiązanie pytaniá. Tać to przyczyna dała do myśleniá Geometrom o innym nowym i dokładnie'yſzym ſpoſobie eliminacyi. Ich wielorakie badaniá ſą náylepſzym dowode'm natężonych uſiłowáń, które'mi chciano te' trudności pokonać. Obierze'my ſobie iedno z nich, które' wyciągnione' s czyſtych rozumowáń, dá nám dokłádnie'yſze' wyobrażenie o naturze tego rachunku; i ſłużyć nám będzie mogło na rozwiązanie wielu innych różne'go rodzaiu pytáń.

Zaczniymy od przykładu ſzczególne'go: Maiąc dwa zrównaniá różnych ſtopni:

$$x^2+Px+Q=o \quad - - - \quad x^3+px^2+qx+r=o$$

w których P, Q, p, q, r, zamykaią inne' iakie'kolwiek ilości nieznane', a chcąc s tych zrównáń wyrzucić x, nic inne'go ſobie w te'm nie zamierzámy, iak tylko zrobić iedno z nich zrównanie między P, Q, p, q, r; to ieſt: odkryć związek który zachodzić powinie'n między wſzyſtie'mi inne'mi ilościami w zrównaniu potrzebny na to, aby wypadło x. Ale iakżeby te'n związek można wyciągnąć z dwóch związków od ſiebie różnych, gdyby te' nie miały ſobie coś ſpólne'go łączące'go ie' s ſobą wzaiemnie? Zaiſte musi koniecznie zrównanie iedno iakąś zamykać włáſność, którá ſłużąc drugie'mu, byłaby razem grunte'm tego porównaniá które' ſobie między wſpół-czynnikami P, Q, p, q, r, zakładámy wynaleśdź. A ponie'wáż dwa zrównaniá, które' tu ſobie za przykład obraliśmy równie iak i wſzyſtkie' inne' do te'y teoryi ſłużące', chce'my mie'ć náyogólnie'yſze' w ſwoim rodzaiu, dlá tego nie może'my w nich przypuſzczać żadne'go warunku, któryby ich znaczenie ścieśniał. Uważaiąc ie' bez żádne'y

dne'y

dnéy między sobą zawisłości, a nie mogąc przyiśdź do rozwiązaniá tego pytaniá któréśmy tu sobie zadali nie wprowadziwszy iakowéy spólności między naszémi zrównaniami; muszémy przydadź drugi tén warunek potrzebny, i starać się obydwóm w rozwiązaniu zadosyć uczynić. Na czémże zagruntuiémy tę spólność? oto na istotnym charakterze zrównáń i ich piérwiástkach.

Zeby dwa zrównaniá mogły wydadź związek między ich współ-czynnikami, i oraz bydź sobie w czém podobnémi, potrzeba koniecznie, aby iedén ich piérwiástek czyli wártość na x włożoná w iedno i drugié zrównanie, mogła ié obydwa razém przywieśdź do zero; więç żeby znaleśdź pewny związek między P, Q, p, q, r, któryby mógł zgubić x; potrzeba koniecznie, aby obydwa zrównaniá miały iedén piérwiástek spólny; i całé pytanie naszé wychodzi na to: znaleśdz związek pewién między współ-czynnikami P, Q, p, q, r, potrzebny na to, aby obydwa zrównaniá podané miały iedén piérwiástek spólny:

Nazwiymy m tén spólny piérwiástek: będzie $x-m$ spólny mnożnik obydwóch zrównáń, a przeto:

$$x^2+Px+Q=(x-m)(x+A)$$

$$x^3+px^2+qx+r=(x-m)(x^2+ax+b),$$

gdzie A, a, b, są ilości nieznané: z dwóch tych ostatnich zrównáń wypadá:

$$\frac{x^3+px^2+qx+r}{x^2+ax+b}=\frac{x^2+Px+Q}{x+A}$$

$$(x^3+px^2+qx+r)(x+A)=(x^2+Px+Q)(x^2+ax+b).$$

wykonáwszy mnożenie otrzymámy zrównanie *Tosamé*, którégo każdy termin w iednym członku, iedno iest s terminém mu podobnym drugiégo członka. Równaiąc więc między sobą współ-czynniki s tego mnożeniá wynikłé, otrzymámy cztéry zrównaniá:

(1) - $A+p=P+a$ - - (2) - $Ap+q=Q+Pa+b$

(3) - $Aq+r=Qa+Pb$ - - (4) $Ar=Qb$.

 piérwszé

piérwſzé i drugié daie:
$A=P-p+a$ - - $b=Pp-p^2+pa+q-Q-Pa$, té wártości włożywſzy w (3) przyidziémy do
$Pp(P-p)+pq-PQ-r=P(P-p)a-(Q-q)a$, a zatém
$$a=\frac{Pp(P-p)+pq-PQ-r}{P(P-p)-(Q-q)}=p-\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)},$$
té ſamé wártości za A, b, włożoné w (4) zrównanie, wydadzą
$Q(P-p)a+ra=Qp(P-p)+Q(q-Q)-r(P-p)$, przeto
$$a=\frac{Qp(P-p)+Q(q-Q)-r(P-p)}{Q(P-p)+r}=p-\frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r}$$
idzie więc za tém, że
$$\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)}=\frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r},$$ s którégo powſtaie naſtępuiącé zrównanie:
$$Q(P-p)(Pq-Qp)+2Qr(P-p)+Pr(Q-q)-P^2r(P-p)$$
$$+Q(Q-q)^2+r^2=o.$$
Zawiéraiącé w ſobie té warunki, któréśmy do pytaniá wprowadzili, to ieſt: związek między wſpółczynnikami potrzebny na to, aby obydwa zrównaniá podané miały iedén piérwiáſték ſpólny. Podźmy iuż do przykładu ogólnégo. Niéch będą dwa zrównaniá iakiégokolwiek ſtopnia:
$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+Sx^{m-4}+ \text{ i t. d. } =o.$$
$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+sx^{n-4}+ \text{ i t. d. } =o.$$
s których náleży wynaleśdź związek między wſpółczynnikami potrzebny na to, aby znikło x, to ieſt: potrzeba wynaleśdź zrównanie między P, Q, R, S, i t. d. p, q, r, s, i t. d. aby obydwa zrównaniá miały iedén ſpólny piérwiáſtek czyli ſpólnégo mnożnika $x-m$. Zaczém rządząc ſię wyżéy podanym ſpoſobém wypadnie.
$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+ \text{ i t. d.}$$
$$=(x-m)(x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+ \text{ i t. d.})$$
x^n+

$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+$ i t. d.
$=(x-m)(x^{n-1}+ax^{n-2}+bx^{n-3}+$ i t. d.)
s których powftanie zrównanie to-samé:
$(x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+$ i t. d. $)(x^{n-1}+ax^{n-2}$ $+bx^{n-3}+$ i t. d)$=(x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+$ i t. d.)
$(x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+$ i t. d.)
równaiąc w niém wfpół-czynniki terminów podobnych, otrzymámy liczbę zrównáń $m+n-1$, gdyż piérwfzé terminy będąc téż famé bez żádnégo wfpół-czynnika, nie wnidą w porównanie; a poniéważ mámy niewiadomych, A, B, C, D, i t. d. liczbę $m-1$; niewiadomych zaś a, b, c, d, i t. d. liczbę $n-1$; na oznaczenie tych wfzyftkich potrzeba liczby zrównáń $m+n-2$; zoftaie fię więc iedno zrównanie nad to, które iak wiémy z §. 10. ieft warunkowé, to ieft zawieraiącé w fobie kondycye wprowadzoné, od których odpowiedź pytaniá zawifła. Teoryą tę winniśmy I. P. *Eulerowi* którą on podáł w Pamiętnikach Akademii Berlińfkiey na Rok 1764. Przyftófóymy ią do zrównáń którésmy na końcu §. poprzedzaiącégo zoftawili. Przyfzliśmy tám do dwóch zrównáń,

$$y^3-P=0 \;\; - \; - \; - \;\; y^3-Ay^2+By+C=0$$

s których nám potrzeba wyrzucić y. Podług dopiéro wyłożonégo fpofobu,

$$y^3-P=(y-m)(y^2+ay+b) \;\; - \; - \; - \; -$$
$$y^3-Ay^2+By+C=(y-m)(y^2+py+q),$$
$$\frac{y^3-P}{y^2+ay+b}=\frac{y^3-Ay^2+By+C}{y^2+py+q};$$
$$(y^3-P)(y^2+py+q)=(y^3-Ay^2+By+C)(y^2+ay+b),$$

po wykonaném mnożeniu równaiąc wfpół-czynniki podobné, otrzymámy pięć naftępuiących zrównáń:
(1) $a-A=p$ - - (2) $B+b-Aa=q$ - - (3) $P=bA-Ba-C$ - - (4) $Ca+Bb=-Pp$ - - (5) $bC=-Pq$
s których náleży wyrzucić a, b, p, q. Mámy z (1),(2),

 $a=A+p$;

$a=A+p$; - - $b=A^2+Ap+q-B$, té wártości włożywſzy w (4), (5), (3), wypadną té trzy na p - -

$$p=\frac{B^2-Bq-BA^2-CA}{BA+C+P}\quad p=\frac{BC-(P+C)q+CA^2}{CA};$$

$$p=\frac{P+2BA+C-A^3-Aq}{A^2-B};$$

rownaiąc piérwſzą wártość p, z drugą, wypadnie - -

$$q=\frac{BC^2+PBC-PCA^2}{BAP+B^2+P^2}$$

drugą zaś wártość na p równaiąc s trzecią, wyciągniémy

$q=\frac{CAP+2BCA^2+C^2A+B^2C}{CB+PB-PA^2}$, s porównaniá dwóch wártości na q, otrzymámy na koniec zrównanie ſzukané bez y.

$$(CAP+2BCA^2+C^2A+B^2C)(BAP+C^2+P^2)$$
$$-(BC^2+PBC-PCA^2)(CB+PB-PA^2)=0$$

włożywſzy w nié za A, B, C, P, wártości, których oné zaſtępowały miéyſce w rachunku; otrzymámy zrównanie na u wymierné podług tego cośmy ſobie w §. 25. zamierzyli.

§. XXVII.

Różność zrównań wykłádá ſię z różności wymiaru w terminach.

Po tych wſzyſtkich właſnościach ogólnych zrównań, zoſtaie nám iedna uwága wypadaiącá s piérwſzych Roz: I. początków: ponieważ zrównanie iakiégokolwiek ſtopnia zamyká związek między ilościami w niém zawartémi, tén związek nie mógł wypaśdź tylko s porównaniá tychże ilości między ſobą. Aże nie możémy nigdy równáć s ſobą tylko rzeczy iednéy natury; idzie za tém, że terminy w zrównaniu zamknięté ſą koniecznie iednéy nátury; to ieſt iednégo wymiáru, czyli ſtopnia: gdyż natura ilości zależy na iednoſtayności wymiaru, wymiár zaś na równéy liczbie mnożników w termin wchodzących. Ieżeli więc zrównanie iakié ieſt rzetelné i mogącé

gące co znaczyć, wszystkie iego terminy powinny bydź iednego wymiaru, to iest powinny mieć równą liczbę mnożników. Do tych mnożników nie należą bynaymniey liczby; bo te nie odmieniaią nic w náturze ilości ogólney. Każde takowe zrównanie zamykaiące równą liczbę mnożników literalnych w swych terminach nazywa się Iedno-rodnem (*Aequatio homogenea*). n. p. $x^3+3a^2x+ax^2+b^3=o$.

Ieżeli zaś liczba mnożników w terminach iakiego zrównaniá iest nierówná, na tén czás uważáć potrzeba każdy taki niedostateczny termin, iako rozmnożony przez tyle ilości wziętych za iedność, ile mu mnożników do równego wymiaru brakuie: i takowe zrównanie zowie się Różno-rodnem (*Aequatio heterogenea*) n. p. $x^3+ax+3b=o$. tén sám podział i ta sama uwága służy funkcyom, s których powstaią zrównaniá.

Skończmy tén Rozdział króciuteńką uwágą nad sposobem naszych dociekáń. Bawiąc się w początku naszéy nauki nad iakiém pytaniém dochodziliśmy w niém związku przez stósunek i porównanie w myśli rzeczy znánych z nieznanémi: wszystkie te stósunki ogarnęliśmy wprzód rozumowaniém, niżeśmy ie wyrazili przez znaki, dlá tego że tam kombinacye iesźcze były barzo proste. Teráz zaś zapuściwszy się w delikatnieysze pytaniá iakiém było n.p. to ostatnie, gdzie kombinacye zachodzą liczniéysze i zawikléysze, nie mogliśmy natychmiást rzeczy nieznaney z znanémi równać myślą, bo mnogość kombinacyi razém związanych i potrzebuiących prawie w momencie iednego ogarnięniá iuż iest nad siły naszego rozumu swym działaniom oddanego: trzeba go tu było wesprzeć pomocą rachunku; przeto czyniąc prawie podstęp pod trudnością, staraliśmy się náprzód pytanie nasze związać s początkiém iakim walnym; i za pomocą tego trafić na zrównanie, w któreby rzecz nieznana wesźłá. Potém dopiéro

Dowodzą się s poprzedzaiących wiadomości wielkie pożytki rachunku przeciwko zarzutom pewnych Autorów.

uważaiąc ią iak gdyby była znana, wpadliśmy na większą liczbę nieznanych, które iednak za pomocą rachunku przywiedliśmy do tego stanu, iż wszystkie łatwym sposobem mogły bydź znoszone i równane z rzeczami znanemi. S tego stosunku wypadły nam wartości wszystkich nieznanych zamkniętych w zrównaniu, a w nich to, cośmy sobie do wynalezienia zadali. Rachunek więc rozebrał naszę kombinacyą na swe że tak powiem elementa, i ugiął trudność do naszey mocy; bo to co trzeba było koniecznie razem ogarniać i równać, a czego dokazać było niepodobna; przywiodł do tego stanu, iż mogło bydź uważane i równane po części. Szliśmy więc tym co przedtem sposobem ale inaczey nakierowanym, w nim złączyliśmy początek Analityczny s początkiem ilości nieoznaczonych §. 9. do których zręcznego kierowania posłużyły nam własności zrównań dawniey odkryte. Droga ta wynalazków ledwo nam nie będzie w całem dziele powszechną: nie odmieni ona się tylko podług szczególnych każdego zadania okoliczności, które stosować będziemy z nayblizey związanemi poznanemi prawdami. Rachunek będzie iedyną silnią naszą do pokonania zastępuiacych trudności, wspierać on nas będzie oszczędzeniem rozumowań tych, które iuż raz były uczynione, bo ich zbytek równie zasłania prawdę wszystkim umysłom iak ią zasłania niedostatek umysłom niedołężnym. Na mieysce iednak tych oszczędzonych rozumowań podawać on będzie materyą nowych; które są właściwemi wypadkami świeżego wynalazku. Dostrzegliśmy iuż tey prawdy na początku tego rozdziału, ale ią ieszcze widzieć będziemy iaśniey w następuiącym.

ROZDZIAŁ

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Rozwięzuią się Zrównania Trzeciego i Czwartego Stopnia z tłomaczeniém własności każdému szczególnych: prawidła tych działań rostrząśnioné podług nabytych początków, pokazuią się niedostateczné, w nich zaś wszystkié przeszkody, króré zatamowały postępek Geometrów w rozwiązaniu Zrównań wyższych Stopni; á ostatnie ucieczki naszéy niedoskonałości zostawioné, wprowádzaią nás w nowy rodzáy Rachunku, który Część drugą naszych badań zabiérá.

§. XXVIII.

Zbierzmy nasámprzód wszystkié trudności, któré nám przeszkádzały do rozwiązaniá zrównáń stopni wyższych od drugiégo; i doświadczmy czyli té nie będą mogły bydź zwyciężoné. Rozwiązaliśmy drugi stopień przez dopełnienie potęgi drugiéy w funkcyi ilości nieznanéy, składaiącéy piérwszy członek zrównaniá. Dostrzegliśmy potém że chcąc się trzymać téy saméy drogi w wyższych stopniach, potrzebaby mieć zrównanie, którégo współ-czynniki byłyby w pewnym stósunku swéy potędze przyzwoitym, n.p. maiąc zrównanie 3go stopniá. $x^3+px^2+qx+r=o$ i równaiąc ié s funkcyą zupełną potęgi 3ciéy $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=o$, wypadnie warunek: $\frac{p}{3}=\sqrt{\frac{q}{3}}=\sqrt[3]{r}$, który zamyká stósonek między ilościami znanémi potrzebny na to, aby s funkcyi w zrównanie wchodzącéy mógł bydź zupełnie piérwiástek wyciągniony. Warunek tén uszczególniá niezmiernie

Rozwiązanie zrównaniá 3go stopnia.

zmiernie

zmiernie zrównanie, i ſpoſób rozwiązaniá onégo przywięzuie tylko do przypádku zawartégo w zrównaniach $\frac{p}{3}=\sqrt{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{r}$. Oświéceni początkami gruntuiącémi doſkonałość naſzéy nauki, nie możémy nie uznać iakbyśmy mało tak ſzczególnym rozwiązaniá zrównáń ſpoſobém poſtąpili. Zebyśmy więc zrównanie podané zachowali przy całéy ſwéy ogólności, potrzebaby nám niektóré terminy przenieść na drugi członek zrównaniá, aby ocálić ilości znáné przy dáwnéy ſwéy wártości, a dopiéro potém dorzucić té terminy, któré do pełności potęgi brakuią: ale tym ſpoſobém wprowadzémy ilość nieznaną z obydwóch ſtron zrównaniá, któré poty nie będzie rozwiązané, póki z drugiéy ſtrony ilość nieznaná nie zniknie. Oſtatniá ta trudność, nie ieſt ciężká, abyśmy iey nie mieli użyciém §. 9. pokonać; pracuymy nad nią, ile że przy niéy zrównanie nic s ſwéy ogólności nie traci.

Wláſność powſzechná zrównáń w §. 22. wyłożoná uczy nás, że zrównanie zmniéyſzyć możná iednym terminém nie naruſzywſzy ani iego związku, ani ogólności. Użyimy iéy teráz dlą uproſzczeniá podanégo zrównaniá $x^3+px^2+qx+r=o$, położywſzy - - $x=y-\frac{p}{3}$, otrzymámy:

$$\left.\begin{matrix} y^3-\frac{1}{3}p^2.y-\frac{2}{27}p^3 \\ +\ q\ .\ -\frac{1}{3}pq \\ +\ r \end{matrix}\right\}=o$$

nazwáwſzy dlá proſtſzégo wyrazu $-\frac{1}{3}p^2+q=a$; $\frac{2}{27}p^3-\frac{1}{3}pq+r=b$ będziém mieli zrównanie do rozwiązaniá pod wyrazém prościéyſzym - - - -

$$(A)\ \text{- -}\ y^3+ay+b=o\ \text{- -}\ y^3=-ay-b.$$

a wziąwſzy drugą niewiadomą z, ſkombinuymy ią z y ąby z iednégo członka wypadła potęga trzeciá zupełná;

pełná, to ieſt: przydáymy z obydwóch ſtron terminy $3y^2z+3yz^2+z^3$; zrównanie naſzé ſtanie ſię:

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=3y^2z+3z^2y+z^3-b \;\text{- - -}\; (B).$$
$$-ay$$

nowá ta nieznaná z daie nám prawo wprowadzeniá takiéy kondycyi, iakiéy rozwiązanie zrównaniá potrzebuie. Pamiętáymy że to załeży od zniſzczeniá nieznanéy y w drugim członku zrównaniá, więc - - $3zy^2+(3z^2-a)y=o$, czyli: $3zy+3z^2-a=o$ - - - $y+z=\frac{a}{3z}$; $(y+z)^3=\frac{a^3}{27z^3}$. Ale zrównanie (B) w tém nowém przypuſzczeniu odmieniá ſię na - - - $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=z^3-b$, to ieſt: $(y+z)^3=z^3-b$, zaczém - - $z^3-b=\frac{a^3}{27z^3}$ $z^6-bz^3=\frac{a^3}{27}$ - - - - (C).

Zrównanie *6go* ſtopnia które podług §. 17. rozwiązać ſię może ſpoſobém drugiégo, i dá nám wártość na z w funkcyi a, b. Rozwiązáwſzy ié więc, podług prawideł §. 17. znáydziémy:

$$z^3=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3\right)} \;\text{- -}\; z=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3\right)}\right)}.$$

Aże zrównanie podané (A) odmieniło ſię było na

$$(y+z)^3=z^3-b \;\text{- -}\; y=-z+\sqrt[3]{(z^3-b)}$$

włożywſzy w to oſtatnié za z, z^3 wártości dopiéro odkryté otrzymámy:

$$y=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)}$$

gdzie nie położyliśmy tylko iedén znak przed znamieniami piérwiáſtkowémi drugiéy potęgi, dlá tego że na obadwa tén ſám wypádá wyráz: powtóre, znak odiémny przed cechą piérwiáſtkową przenieśliśmy za cechę; wiémy bowiem że znaki odiemné lub dodatné w piérwiáſtkach potęg niepárzyſtych mogą ſię kłaśdź przed, lub po znamieniu piérwiáſtkowém i tak $\sqrt[3]{-a}$ iedno znaczy co $=-\sqrt[3]{a}$.

Znale-

Znaleźliśmy iuż iedén piérwiáſtek zrównaniá 3go ſtopnia, zoſtaie nám ich ieſzcze dwa do wynalezieniá. Piérwiáſtek iakiégokolwiek zrównaniá przywiedziony do zero, ſtaie ſię iego dzielnikiém, i zniża ié o iedén ſtopień. Potrzeba nám więc zrównanie podané rozdzielić przez piérwiáſtek dopiéro znaleziony; ale że ilości niewymiérné czyniłyby nám to dziáłanie barzo zawikłané, przeto dlá uproſzczeniá wyrazów nazwiémy:

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)}=g \quad - - - -$$

$$\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)}=h.$$

S czego wypadnie $gh=-\frac{1}{3}a$, $a=-3gh$: powtóre; $b=-g^3-h^3$: włożywſzy w zrównanie (A) za a, b, té wártości wyrażoné przez funkcye g, h, odmieniémy ié na - - $y^3-3ghy-g^3-h^3=0$, piérwiáſtek zaś wynaleziony na $y-g-h=0$, przez który rozdzieliwſzy toż zrównanie, zniżémy ié do drugiégo ſtopnia $y^2+(g+h)y+h^2+g^2-gh=0$, to oſtatnié rozwiązáwſzy podług prawideł w Roz: 2. podanych, znaydziémy inné dwa piérwiáſtki:

$$y=\frac{-(g+h)+(g-h)\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{-(g+h)-(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

do których przydáwſzy piérwſzy, będziémy mieć trzy piérwiáſtki zrównaniá (A)

$$I.\ y=g+h \quad - - \quad II.\ y=\frac{-(g+h)+(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

$$III.\ y=\frac{-(g+h)-(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

piérwſzy z nich ieſt rzetelny, dwa oſtatnié mogą bydź rzetelné lub uroioné; będą rzetelné, ieżeli - - $(g-h)\sqrt{-3}$ ieſt funkcyą rzetelną, to ieſt: ieżeli g, h, będą uroioné; będą zaś dwa oſtatnié piérwiáſtki uroioné, ieżeli $(g-h)\sqrt{-3}$ będzie funkcyą uroioną: to ieſt ieżeli g, h, będą rzetelné, podług §. 16. Będą zaś g, h,

zawſze

zawſze rzetelné, kiedy a ieſt ilością dodátną, albo będąc odiémną, kiedy $\frac{b^2}{4}>\frac{a^3}{27}$. Zaczém kazdé zrównanie 3go ſtopnia pod wzórém $y^3+ay\pm b=0$ má tylko iedén piérwiáſtek rzetelny, a dwa uroioné: *powtóré*: zrównanie pod wzorém $y^3-ay\pm b=0$ ieſt tegóż ſamégo rodzaiu kiedy $\frac{b^2}{4}>\frac{a^3}{27}$. Gdyby zaś było w tém oſtatniém zrównaniu $\frac{b^2}{4}=\frac{a^3}{27}$, zrównanie 3gó ſtopnia będzie na tén czás miało wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné, s których dwa będą ſobie równé. Wprowadziwſzy bowiem to przypuſzczenie, będzie $g=h$, a przeto wártości na y,

$$y=2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \quad \cdot \cdot \quad y=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}} \quad \cdot \cdot \quad y=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

Zatrzymáymy ſię teráz z uwágą nad zrównaniém $y^3-ay\pm b=0$ kiedy w niém $\frac{1}{4}b^2<\frac{1}{27}a^3$. W tém przypuſzczéniu g, h, ſtaną ſię uroionémi, a przeto funkcyá $(g-h)\sqrt{-3}$ będzie rzetelną. Ze zaś g, h, znáyduią ſię ieſzcze ſamé we wſzyſtkich trzech piérwiáſtkach, zdaie ſię na pozór że wſzyſtkié té piérwiáſtki ſtaną ſię uroionémi; w tym iednak przypádku wſzyſtkié ſą rzetelné. Doświadczmy tego rachunkiém, który abyśmy tém łatwiéy wykonali, ſkróćmy ieſzcze ráz naſzé wyrazy: połóżmy na miéyſce $\frac{b}{2}$, m; na miéyſce zaś $\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{27}a^3\right)}$, która ieſt podług teraźniéyſzégo przypuſzczéniá uroioną, połóżmy $n\sqrt{-1}$; będą więc naſzé piérwiáſtki:

$$y=\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right)+\frac{\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right).$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right).$$

każdy s tych terminów odwikławszy podług wzoru Newtona, otrzymamy tyle szeregów nieskończonych, ile się terminów niewymiernych znayduie. W czém tę mieć należy uwagę, że, ponieważ wartość ilości nieznáney s takowych wyrazów nie może wypaśdź tylko bliska prawdy; starać się powinniśmy aby, to zbliżenie było náywiększe i náykrótsze, to iest aby terminy szeregów pomykaiąc się znacznie malały. Na tén koniec obierać należy za pierwszy termin w porządku potęg, tén, który iest większy. Ieżeli w teraźnieyszym wyrazie pierwiastków $-m > n\sqrt{-1}$, m będzie pierwszym terminém dlá tego, że w ciągu szeregu maiąc wykładnika odiemnégo staie się mianownikiém ułomku; i uczyni go przéz potęgi coráz barziéy maleiącym. Przystąpmy iuż do rachowania pierwszégo pierwiastku, pamiętaiąc w rachunku na różné potęgi $n\sqrt{-1}$. które tak następuią: $n\sqrt{-1}, -n^2, -n^3\sqrt{-1}, +n^4, n^5\sqrt{-1}, -n^6$, i t. d:

$$(-m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{n\sqrt{-1}}{m}\right)^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}$$
$$\left(1-\frac{n\sqrt{-1}}{3m}+\frac{1}{9}\cdot\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3}-\frac{10}{243}\cdot\frac{n^4}{m^4}-\frac{22}{729}\cdot\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}+\text{i t. d.}\right)$$

$$-(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{n\sqrt{-1}}{m}\right)^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}$$
$$\left(1+\frac{n\sqrt{-1}}{3m}+\frac{1}{9}\cdot\frac{n^2}{m^2}-\frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3}-\frac{10}{243}\cdot\frac{n^4}{m^4}+\frac{22}{729}\cdot\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}+\text{i t. d.}\right)$$

które

któré dodáwſzy razém, wſzyſtkié terminy uroioné wypadną a wártość na y będzie daná w ſamych rzetelnych.

$$y = -2m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243}\cdot\frac{n^4}{m^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{n^6}{m^6} - \text{i t.d.}\right)$$

działaiąc podobnym ſpoſobém w wyrazie innych piérwiáſtków, zginą naſámprzód wſzyſtkié terminy uroioné, a w ſamych funkcyach rzetelnych wypadną ieſzcze naſtępuiącé dwié wártości na y.

$$y = m^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{n}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3}{m^3} - \frac{22.n^5}{729m^5} + \text{i t. d.}\right) + m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{n\sqrt{3}}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{22}{729}\cdot\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{i t.d.}\right)$$

$$y = m^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{n}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3}{m^3} - \frac{22}{729}\cdot\frac{n^5}{m^5} + \text{i t. d.}\right) - m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{n\sqrt{3}}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{22}{729}\cdot\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{i t. d.}\right)$$

Przyſzliśmy do wyrazów rzetelnych w trzech piérwiáſtkach zrównaniá $y^3 - ay \pm b = 0$, kiedy $\frac{1}{4}b^2 < \frac{1}{27}a^3$ ale té wyrazy nie kończąc ſię nigdy, ſłużą raczéy do przekonaniá nás, że piérwiáſtki ſą rzetelné, niż do odkryciá ściſłéy ich wártości. Takowy przypádek zrównáń 3go ſtopnia wziął imie NIEPRZYWIEDLNEGO (*caſus irreductibilis*), s tąd, że náprzód prowadzi do wyrazu uroionégo piérwiáſtków: tén wyráz, potém przerobiwſzy, trafiámy na ſzeregi bez końca, któré nie mogą dadź tylko wártości bliſkié práwdy na ilość nieznaną. Przypádek nieprzywiedlny má zawſze miéyſce w zrównaniach 3go ſtopnia, ilé razy té zamykaią trzy piérwiáſtki rzetelné, nierówné i niewymiérné. Wſzyſtkié kuſzeniá Geometrów do uniknieniá tego przypádku a zatém do rozwiązaniá zupełnégo zrównáń 3go ſtopnia były dotąd niepomyślné,

Przypádek w którym zrównanie 3go ſtopnia nie może bydź dokładnie rozwiązané.

S kąd wnieść należy, że ilé razy w zrównaniach 3go ftopnia trafiémy na tén przypadek, nie ieſteśmy w ſtanie rozwiązać dokładnie takowégo zrównania: że oſtatniá ucieczka, która nám w tym rązie zoſtaie, zależy na ſzukaniu piérwiáſtków bliſkich práwdy, przez uczynienie ſzeregów iak náybarziéy máleiącemi. Spoſoby na to podané barzo rozległego potrzebuią tłómaczeniá, które nás zatrudni niżéy, pamiętáymy tylko, że ieſteśmy oczywiſtą potrzebą wciągnieni w tén nowy prawie rodzáy rachunku. Co ſię zaś tycze piérwiáſtków uroionych, o nich teraźniéyſzé uwági uczą nás, że té mogą ſię pokázać w wypádkach oſtatnich rachunku, nie będąc do niego przywiązanémi: chcąc przeto rossądzić czyli piérwiáſtki uroioné koniecznie z naſzégo wypádaią pytaniá lub nie? należy nám wprzód poczynić wſzyſtkié przerobieniá oſtatnich zrównáń zamykaiących uroioné wyrazy; ieżeli ié potrafiémy zmazać, znakiém ieſt, że terminy uroioné przypádkiém tylko wmięſzały ſię w rachunek; ieżeli zaś po wſzyſtich odmianach zoſtaną; pokazuią na tén czás niepodobieńſtwo tego czego ſzukámy: to niepodobieńſtwo znaleśdź powinniśmy w roſtrząſaniu uważnym wſzyſtkich kondycyi naſzégo pytaniá.

Spoſób, który nás przywiódł do rozwiązaniá zrównáń *3go* ſtopnia zawiſł od oznaczeniá ilości nieznanéy *z*, którąśmy wprowadzili. Ta daná nám była przez zrównanie *6go* ſtopnia *(C)*, s kąd przyidzie nie iednému na myśl, że ponieważ zrównanie to mieć powinno ſześć piérwiáſtków, otrzymámy ſześć wártości na *z*, które włożoné w trzy wartości na *y*, obiecuią 18 piérwiáſtków: coby zruynowało náywalniéyſzy początek o liczbie piérwiáſtków w każdém iakiegokolwiek ſtopnia zrównaniu. Sám tylko rachunek może nás s takowéy trudności wyprowadzić; nie chcémy nim obciążać xiążki, bo tén tak ieſt łatwy, że każdy za pomocą ogólnie podanych początków może go ſobie zrobić. Znáydzie zaś że wſzyſtkié

ſześć

ſześć wártości na z, przywiodą go tylko do trzech wártości na y; to ieſt kładąc którąkolwiek wártość na z, trafi na to ſamo wyrażenie y, a zatém na trzy tylko pierwiáſtki zrównaniá 3go ſtopnia.

Użyimy w przykładzie wyłożonych prawideł na zrównanie 3go ſtopnia: wyſtáwmy ſobie, że pytanie iakié przywiodło nás do tego zrównaniá $x^3+6x^2+20x+124=0$, gdzie $p=6$, $q=20$, $r=124$; na wyrzucenie 2go terminu $x=y-2$; co zamiéni zrównanie podané na - - $y^3+8y+100=0$, które má tylko iedén pierwiáſtek rzetelny, a dwa uroioné podług wyżéy na to podanych znamień. $a=8$, $b=100$, włożywſzy té wártości za a, b, w wyráz ogólny pierwiáſtku, wypadnie:

$$g=\sqrt[3]{\left(-50+\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)} \quad - - \quad h=\sqrt[3]{\left(-50-\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(-50+\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-50-\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)} \text{ czyli}$$

$y=-4,15701$ a zatém $x=-6,15701$.

Obróćmy terász uwágę na ſzczególné przypádki, które zrównanie $x^3+px^2+qx+r=0$ w ſobie ogarniá. Przypuśćmy náprzód że $p=0$, $q=0$, zoſtanie ſię $x^3+r=0$, a w przerobioném zrównaniu będzie $a=0$, $b=r$ $y^3+r=0$: to ieſt $x=y$; iego więc pierwiáſtek - - $x=\sqrt[3]{-r}$; niech będzie $r=m^3$, $\sqrt[3]{-r}=-m$; wypadnie $x^3+m^3=0$, które rozdzieliwſzy przez $x+m=0$, otrzymámy - - - - $x^2-mx+m^2=0$, - - -

$$x=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-m^2\right)}=\frac{m}{2}\left(1\pm\sqrt{-3}\right)$$

obydwa pierwiáſtki uroioné; co właśnie wyciągniémy s trzech pierwiáſtków zrównaniá ogólnégo. Więc zrównanie 3go ſtopnia $x^3+r=0$, má tylko iedén pierwiáſtek rzetelny, a dwa uroioné; zrównanie zaś $x^3-r=0$, má wſzyſtkié trzy pierwiáſtki rzetelné. Ocáliwſzy p, q, a położywſzy $r=0$; znaydziémy ie-

den pierwiáſtek równy zero, i zrównanie zniży ſię do drugiego ſtopnia.

Skończmy zrównaniá 3go ſtopnia tą ſamą uwagą, którąśmy uczynili nad zrównaniami 2go pod §. 17; to ieſt, że prawidła dopiero odkryte rosciągaią ſię do zrównań wyżſzych ſtopni zawartych w wzorze: $x^{3n}+px^{2n}+qx^{n}+r=o$. uczyniwſzy bowiem $x^{n}=y$, zrównanie to zamieni ſię na $y^{3}+py^{2}+qy+r=o$ iakie nás dotąd zatrudniało.

§. XXIX.

Rozwięzuie ſię zrównanie 4go ſtopnia.

Doſyć nám ieſt przenieść pierwſze uwági nad zrównaniem 3go ſtopnia do ſtopni wyżſzych, aby ſię przekonać, że te ſame trudności, które nám ſię náſámprzód pokázały w zrównaniach 3go ſtopnia, maią mieyſce i w ſtopniu czwártym. Nie potrzeba nám więc odſtępować od tych początków, które nám do zwyciężeniá tamtych przeſzkód pomogły. Wſzyſtkie iakiekolwiek zrównaniá 4go ſtopnia wyſtawić ſię mogą w tem ogólnem - - - $x^{4}+px^{3}+qx^{2}+rx+s=o$, które nám wprzód potrzeba zgubieniem drugiego terminu uprościć, niżeli przyſtąpiemy do iego rozwiązaniá. Na ten koniec niech będzie $x=y-\frac{p}{4}$, §. 22; zrównanie naſze zamieni ſię na:

$$\left.\begin{array}{l} y^{4}-\frac{3}{8}p^{2}.y^{2}+\frac{1}{8}p^{3}.y-\frac{3}{256}p^{4} \\ \quad +\ q,\ -\frac{1}{2}pq.+\frac{1}{16}p^{2}q \\ \qquad\qquad +\ r.-\frac{1}{4}pr \\ \qquad\qquad\qquad +s \end{array}\right\} =o.$$

uczyńmy dla ſkróceniá wyrazów $-\frac{3}{8}p^{2}+q=a$; $\frac{1}{8}p^{3}-\frac{1}{2}pq+r=b$; $-\frac{3}{256}p^{4}+\frac{1}{16}p^{2}q-\frac{1}{4}pr+s=c$, a wy-

padnie

padnie zrównanie 4go ſtopnia do rozwiązaniá.

(α) - - $y^4+ay^2+by+c=0$ - - - $y^4=-ay^2-by-c$

przybierzmy ſobie inną nieznaną z maiącą nám ſłużyć do wyrzuceniá y z drugiey ſtrony zrównaniá, i do dopełnieniá potęgi w pierwſzym członku. W tém dopełnieniu nie możnáżby obrać niżſzey potęgi nad czwártą, którąby iednak ocáliła zupełnie y^4? Pamiętaiąc na to cośmy w §. 17. mówili; doſtrzeżemy łatwo, że zamiáſt potęgi czwártey możemy użyć drugiey, byleby wykładnik wtórego terminu był połową pierwſzego: takim ſpoſobem zrównanie 4go ſtopnia przywiedziémy do 2go, nic nie odmieniwſzy w iego ogólności; wſzyſtkie bowiem terminy zrównaniá (α) iego ogólność wyrážaiące, będą ſię w zrównaniu tak przerobionem znaydować. Otrzymámy więc:

$$y^4+2zy^2+z^2=(2z-a)y^2-by-c+z^2 \text{ - - - } (\beta)$$

pierwſzy członek tego zrównaniá ieſt zupełną potęgą drugą, przypuśćmy także że i drugi członek ieſt takąż potęgą zupełną, ile że do tego przypuſzczeniá daie nám prawo nieznaná z. Zeby tén warunek mogł mieć mieyſce, wyſtáwmy ſobie drugi zrównaniá członek pod tym wzorem: $y^2-\frac{b}{2z-a}y+\frac{z^2-c}{2z-a}$; a ponieważ trzeci termin bydź powinien potęgą drugą połowy wſpół-czynnika drugiego, wypada zrównanie warunkowe:

$$\frac{b^2}{4(2z-a)^2}=\frac{z^2-c}{2z-a}, \text{ czyli - - } -b=2\sqrt{[(z^2-c)(2z-a)]}$$

dla proſtſzego wyrazu uczyńmy ieſzcze $2z-a=u$, - - $z=\frac{u+a}{2}$ - - $z^2-c=\frac{(a+u)^2-4c}{4}$: wprowadziwſzy te wártości w zrównánie warunkowe, i oſwobodziwſzy ie od znaku pierwiáſtkowego, otrzymámy:

$$u^3+2au^2+(a^2-4c)u-b^2=0 \text{ - - - } (\gamma).$$

Zrównanie to zawierá náprzód w ſobie tę kondycyą,

aby drugi członek zrównaniá (β) był zupełną potęgą drugą; po wrórę: służy do oznaczeniá nieznaney z którąśmy wprowadzili: wciągnąwszy wártość za b przez warunek odkrytą w zrównanie (β), wypadnie

$$y^4+2zy^2+z^2=(2z-a)y^2+2\sqrt{[(z^2-c)(2z-a)]}\,y+z^2-c$$

a wyciągnąwszy z obydwóch stron pierwiástek potęgi drugiey, będzie:

$y^2+z=\pm(y\sqrt{(2z-a)}+\sqrt{(z^2-c)})$, to iest kładąc za z, z^2, iego wártości:

$$y^2-y\sqrt{u}=-\frac{u+a}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u}};\quad y^2+y\sqrt{u}=-\frac{u+a}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u}}.$$

dwa te zrównaniá rozwiązane podług prawideł Rozd. 2. dadzą cztery pierwiástki:

$$(1)\quad y=\frac{\sqrt{u}}{2}+\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

$$(2)\quad y=\frac{\sqrt{u}}{2}-\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

$$(3)\quad y=-\frac{\sqrt{u}}{2}+\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

$$(4)\quad y=-\frac{\sqrt{u}}{2}-\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

Pierwsze dwa maią te same ilości pod znakiem pierwiástkowym, i dwa ostatnie także te same, przeto ieżeli pierwszy pierwiástek będzie rzetelny lub uroiony, drugi takiż bydź musi; ieżeli trzeci pierwiástek będzie uroiony lub rzetelny, czwárty także będzie koniecznie uroionym lub rzetelnym. Więc zrównanie 4go stopnia może mieć albo wszystkie pierwiástki uroione, albo wszystkie rzetelne, albo dwa rzetelne a dwa uroione. Niżeli przystąpiemy do rostrząsaniá znamień każdego s tych przypádków, ułatwić w przód należy trudność, która się tu nadarza.

Każdy s czterech pierwiástków zrównaniá (α) zamyka w sobie u, które dane iest przez zrównanie 3go

stopnia

ſtopnia (γ). To rozwiązáwſzy wypadną trzy wártości na u, które naſtępnie kładzione w cztéry wártości y, obiecuią dwanáście piérwiáſtków zrównaniá (α). Trudność tak rzetelná wyciągnioná z właſności zrównáń godna całą naſzę zatrzymać uwágę; bo w niéy idzie o całość náypiérwſzych práwd gruntowych. Żeby té zoſtały nienaruſzoné, a zrównanie 4go ſtopnia (α) nie wydało więcéy iak cztéry piérwiáſtki, potrzebaby aby każdá s trzech wártości na u, zoſtawiła cztéry piérwiáſtki przy tym ſamym nieodmiennym wyrazie. Na tén koniec potrzebaby nám rozwiązać zrównanie (γ) podług prawideł §§. poprzedzaiących, i widzieć, czyli to co ſię zdaie bydź koniecznym wypádkiém pewnych początków, ieſt także wypádkiém doświadczéniá i rachunku. Ale tén rachunek byłby niezmiernie długi, uſiłuymy koniecznie przekonać ſię o tém drogą krótſzą i łatwiéyſzą. Poniewaź tu nie idzie tylko o upewnienie ſię, czyli trzy wártości na u, zoſtawią piérwiáſtki zrównaniá (α) przy téy ſaméy liczbie lub nie? doſyć nám ieſt za iakąkolwiek pomocą tak przerobić zrównanie (γ), aby z niego wyciągnąć trzy wártości na u, któreby ié przywieśdź mogły do zero; nie náleży nám więc bydź w tém dociekaniu troſkliwémi o oznaczenie tego przez ilości znané, od czégo znaiomość piérwiáſtków zawiſła: wyſtáwmy ſobie tylko cztéry wártości na y, iak gdyby zawiérały ſamé ilości znané, i iakby nic do ich oznaczeniá nie brakło, lubo w rzeczy ſaméy ieſzcze w niém nie znamy u. Wziąwſzy trzy litery m, n, s, uczyńmy $\frac{\sqrt{u}}{2}=s$; $\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}=m$; $\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}=n$, a cztery naſzé piérwiáſtki wyrażą ſię krócéy: $y=s+m$; $y=s-m$; $y=-s+n$; $y=-s-n$; rozmnożywſzy ié przez się, otrzymámy zrównanie;

Ułatwiá ſię trudność o liczbie piérwiáſtków.

$$\left.\begin{array}{llll} y^4-2s^2.y^2 & -2m^2s.y & +s^4 \\ \quad -m^2. & +2n^2s. & -s^2n^2 \\ \quad -n^2. & & -s^2m^2 \\ & & +m^2n^2 \end{array}\right\} = 0 \quad (A).$$

które iedno bydź powinno z zrównaniém (α), Równaiąc wſpół-czynniki tamtégo s wſpół-czynnikami tego, wypadá $a=-2s^2-m^2-n^2$; $b=2n^2s-2m^2s$, $c=s^4-s^2n^2-s^2m^2+m^2n^2$: té wártości za a, b, c, włożywſzy w zrównanie (γ) odmiéniémy ié na

$$\left.\begin{array}{llll} u^3-4s^2.u^2 & +8s^2m^2.u & -4s^2(m^2-n^2)^2 \\ \quad -2m^2. & +8s^2n^2. & \\ \quad -2n^2. & +m^4. & \\ & +n^4. & \\ & -2m^2n^2. & \end{array}\right\} = 0 \quad (G).$$

ponieważ oſtatni termin zrównaniá (G) ieſt mnogością s wſzyſtkich piérwiáſtków, rozebráwſzy go na ſwoié mnożniki, znáydziémy ich trzy, $4s^2$, $(m+n)^2$, $(m-n)^2$, s których każdy włożony za u, przywiédzié zrównanie do zero. Użyć więc można tych mnożników iako piérwiáſtków zrównaniá (γ), któré nás nauczą o liczbie piérwiáſtków zrównaniá (α), i ułatwią zupełnie zachodzącą trudność. Biorąc bowiem $u=4s^2$, $u=(m+n)^2$, $u=(m-n)^2$, po iednéy s tych wártości za u, i kładąc ié naſtępnie w cztéry wártości na y, zamiéniwſzy także a, b, c, na funkcyą s, m, n, za pomocą wyżéy podanych na to zrównáń; przéydziémy przez dwanáście kombinacyi, ale nie trafiémy w nich tylko na cztéry różné piérwiáſtki, to ieſt: $y=s+m$; $y=s-m$; $y=-s+n$, $y=-s-n$, każdá wártość na u, naprowadzi nás na nie, a trzy wártości na u trzy razy nám ié tylko powtórzą, nie ſprawiwſzy innéy odmiany prócz téy, że piérwiáſtek na y który był n.p. wyciągniony z zrównaniá (ι) położywſzy $u=4s^2$; wypadnie potém z innégo zrównaniá kładąc $u=(m+n)^2$. Rachunek tak proſty i łatwy przekoná każdégo o prawdzie którą tu ogłáſzámy.

my. Skąd ſię wnoſi oczywiście, że nám nie potrzeba rozwięzywać zupełnie zrównaniá (y), aby z niégo otrzymać trzy wártości na u, nie potrzeba nám bowiem z nich tylko iednéy. Téy doſtąpiwſzy przez iaki ſzczególny ſpoſób z wyżéy podanych, odkryiémy natychmiáſt cztéry piérwiáſtki zrównaniá podanégo.

Gatunki piérwiáſtków wyciągaią ſię z po równaniá ſtopnia 3go s 4tym

Ieſteśmy więc iuż więcéy niż pewni że zrównanie czwártégo ſtopnia nie wydá więcéy nad cztéry piérwiáſtki: ale że té piérwiáſtki bydź mogą wſzyſtkié rzetelné albo wſzyſtkie uroioné, albo dwa z nich rzetelné a dwa uroioné; oprócz tego zrównanie (y) będąc 3go ſtopnia, może w pewnych okolicznościach naprowadzić nás na przypádek nieprzywiedlny, który dáwſzy nám tylko wártości bliſkié prawdy, przywiedzie nás do podobnych piérwiáſtków w zrównaniach 4go ſtópnia; dlá tego zatrzymać nám ſię z uwágą należy nad rozróżnieniém wſzyſtkich tych przypádków, i nad odkryciém znamién każdému właściwych. Przekonani że zrównanie 4go ſtopnia zawiſło cálkiém od zrównaniá ſtopnia trzeciégo, znieśmy ié razém s sobą, i roſtrząśniymy wſzyſtkié wypádki któré s téy zawiſłości i porównaniá mogą wyniknąć. Połóżmy ſobie náprzód przed oczy wſzyſtkié kombinacye piérwiáſtków rzetelnych i uroionych, któré ſą właściwé zrównaniom 4go ſtopnia, to ieſt:

	$y=s+m$;		$y=s+m\sqrt{-1}$;
I.	$y=s-m$;	II.	$y=s-m\sqrt{-1}$;
	$y=-s+n$;		$y=-s+n\sqrt{-1}$;
	$y=-s-n$;		$y=-s-n\sqrt{-}$;
	$y=s+m$		$y=s+m\sqrt{-1}$
III.	$y=s-m$	IV.	$y=s-m\sqrt{-1}$
	$y=-s+n\sqrt{-1}$		$y=-s+n$
	$y=-s-n\sqrt{-1}$		$y=-s-n$

do tych przypádków ſtóſować winniśmy wártości na u, kładąc w nich za m, n, wártość taką, iaká ſię znayduie w przypádku do którégo przywiązuiémy

naſzę uwágę, to ieſt: w (I) m, n, brać náleży za rzetelné: w (II), obydwa za uroioné: w (III) m rzetelné, n uroioné: w (IV) nakoniec m uroioné, n rzetelné. Pamiętáymy zaś o tém, że ilé razy w tych kombinacyach trafiémy na wſzyſtkié trzy rzetelné wártości u, wpádámy na przypádek nieprzywiedlny, który w zrównaniu 3go ſtopnia má miéyſce, kiedy to zamyká wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné: na tén czás niedoſkonałość prawideł 3go ſtopnia wpływać koniecznie będzie w ſtopień czwárty; i zrównanie 4go ſtopnia równie nie będzie mogło bydź zupełnie rozwiązané iak zrównanie 3go. Piérwiáſtki zaś rzetelné lub uroioné wypadną koniecznie z rzetelnych lub uroionych wártości na s, m, n, któré brać winniśmy s cztérech wyłożonych kombinacyi piérwiáſtków czwártégo ſtopnia.

Obróciwſzy náprzód uwágę na (I), wypádaią nám s, m, n, rzetelné, a zatém $u=4s^2$, $u=(m+n)^2$, $u=(m-n)^2$, wſzyſtkié trzy rzetelné piérwiáſtki zrównaniá (γ); więc iako w tym przypádku zrównanie 3go ſtopnia nie daie tylko piérwiáſtki bliſkié práwdy, zrównanie 4go ſtopnia maiąc wſzyſtkié cztéry piérwiáſtki rzetelné, wpádá na przypádek nieprzywiedlny, i nie możemy mieć w niém piérwiaſtków zupełnych. Roſtrząſaiąc powtóre (II), gdzie wſzyſtkié piérwiáſtki uroioné, bráć winniśmy s, $m\sqrt{-1}$, $n\sqrt{-1}$, a zatém $u=4s^2$, $u=(m\sqrt{-1}+n\sqrt{-1})^2=-(n+m)^2$; $u=(m\sqrt{-1}-n\sqrt{-1})^2=-(m-n)^2$, znowu wſzyſtkié trzy rzetelné wártości na u; więc zrównanie 4go ſtopnia maiąc wſzyſtkié cztéry piérwiáſtki uroioné, ieſt znowu w przypádku nieprzywiedlnym, i nie możémy mieć iego piérwiáſtków w wyrazie ſkończonym.

Potrzecie: Przypádek (III). i (IV). daie $s, m, n\sqrt{-1}$; $s, m\sqrt{-1}, n$, kładąc ié w wártości na u, otrzymámy w (III.) $u=4s^2$, $u=(m+n\sqrt{-1})^2=m^2+2mn\sqrt{-1}-n^2$; $u=(m-n\sqrt{-1})^2=m^2-2mn\sqrt{-1}-n^2$; w (IV).

$u=4s^2$;

$u=4s^2$; $u=(m\sqrt{-1}+n)^2=n^2+2mn\sqrt{-1}-m^2$; $u=(m\sqrt{-1}-n)^2=n^2-2mn\sqrt{-1}-m^2$, w obydwóch razach wypádaią dwie wártości uroione na *u*, a iedna rzetelná; w tákowym przypádku wiemy że zrównanie *3go* ftopnia má pierwiáftki w wyrazie fkończonym; więc zrównanie *4go* ftopnia będzie mogło bydź rozwiązane zupełnie w ten czás, kiedy má dwa pierwiáftki uroione a dwa rzetelne.

Ponieważ zrównanie *4go* ftopnia ieft w przypádku nieprzywiedlnym maiąc albo wfzyftkie pierwiáftki rzetelne albo wfzyftkie uroione; iakże rozróżnić od fiebie dwa te przypádki do których ieft przywiązaná niedofkonałość nafzych prawideł? Cecha ta która te dwie rzeczy od fiebie oddziela mufi bydź koniecznie w zrównaniu (y) zawartá. Wróćmy fię do wypádków rachunku na któreśmy natrafili w tych dwóch przypádkach.

Roftrząfaiąc I przykład, gdzie zrównanie *4go* ftopnia má wfzyftkie pierwiáftki rzetelne, tráfiliśmy na trzy wártości *u* dodátne: w II zaś przykładzie, gdzie zachodzą wfzyftkie pierwiáftki uroione, otrzymaliśmy iednę wártość na *u* dodatną, a dwie odiemne. Właśnie w zrównaniu (y) oftatni termin $-b^2$ będąc odiemnym nie mógł powftać tylko albo s wfzyftkich pierwiáftków dodátnych albo iednego dodátnego a dwóch odiemnych podług własności ogólnych zrównań; więc ieżeli zrównanie (y) będzie miało trzy pierwiáftki rzetelne i wfzyftkie dodatne, zrownanie *4go* ftopnia będzie miało wfzyftkie pierwiáftki zupełne. Ieżeli zaś w zrównaniu (y) s trzech rzetelnych pierwiáftków ieden będzie dodátny a dwa odiemne; zrównanie czwártego ftopnia będzie miało wfzyftkie pierwiáftki uroione. W obydwóch zaś przypádkach te pierwiáftki nie będą mogły bydź w wyrazie fkończonym ogarnione; więc iako zrównania *3go* ftopnia nie umiemy dokładnie rozwiązać kiedy má wfzyftkie pierwiáftki rzetelne, tak podobnie

zrównania

zrównaniá 4go ſtopnia nie ieſteśmy w ſtanie doſtąpić piérwiáſtków zupełnych, kiedy te albo wſzyſtkié ſą rzetelné albo wſzyſtkié uroioné.

Przéyście do drugiéy części

Widzémy więc ściſły barzo związek, który zachodzi między zrównaniami niżſzych i wyżſzych ſtopni. Tén związek iak ieſt miły dlá umyſłu, tak ſię ſtáł ſzkodliwy dla Geometrów, bo przeſzkodził dalſzym ich dociekaniom. Widząc bowiem że doſkonałé rozwiązanie zrównań 4go ſtopnia zawiſło koniecznie od doſkonałégo ich rozwiązaniá w trzecim ſtopniu; obrócili całé uſiłowaniá ſwoié na tén oſtatni, aby uniknąć przypádku nieprzywiedlnégo i przyiśdź do odkryciá piérwiáſtków w wyrazie ſkończonym. Wſzyſtkié kuſzeniá i uſiłowaniá ich były dotąd daremné, bo iakiékolwiek przedſięwzięli drogi w rozwiązaniu zrównaniá maiącégo wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné; nie trafili nigdy tylko na piérwiáſtki bliſkié práwdy. Niedokładność ta prawideł pokázała ſię zaráz w ſtopniach wyżſzych; co ich oſtrzégło, iż póty próżno było zapuſzczać ſię w wyżſzé ſtopnie, poki zrównanie 3go ſtopnia nie będzie doſkonale, to ieſt w całéy ſwéy ogólności rozwiązané. Pewné bowiem ſzczególné przypádki, w którychby nám ſię mogło udadź nie rosszerzaią nauki, i nie ſą wárté prácy, któréy rozwlekłość rachunku wyciągá. Náleżało więc po wielu daremnych uſiłowaniach uſtąpić przeſzkodóm, a chwycić ſię zoſtawionych pomocy naſzéy niedoſkonałości. Ieżeli nie możémy mieć zrównań wyżſzych ſtopni piérwiáſtków cale zupełnych; náleżało natężyć całé dociekaniá, aby ſię do nich náybarziéy zbliżyć przez doſkonalenie teoryi ſzeregów, która ſię ſtała w tém odſtąpieniu prawdy oſtatnią i náybeſpiecznieyſzą ucieczką do iéy ściganiá. Przywiedzéni i my ieſteśmy potrzebą i barzo przyrodzonym porządkiém do nowégo przedmiotu naſzych badáń, który nám całą część drugą zabierze. Nim do niéy przyſtąpiémy zatrzymáymy ſię ieſzcze nád niektórémi uwágami wypádaiącémi s tego, cośmy dotąd mówili.

§ XXX.

§. XXX.

Właśności naprzód ogólne zrównań náuczyły nás, że pierwiástki zrównania iakiegokolwiek stopnia zawieraią w swoim wyrazie znaki pierwiástkowe swego stopnia i wszystkich innych stopni od siebie niższych. Doświadczenie potém utwierdziło nás w téy prawdzie, kiedy po rozwiązaném *2go*, *3go* i *4go* stopnia zrównaniu, pierwiástki pokázały się w wyrázie barzo niewymiérnym i zawikłanym. Ten znacznieby się zaiste uprościł, gdyby s funkcyi pod znakami pierwiástkowémi záwártych mogły bydź pierwiástki wyciągnioné sposobém zupełnym. Wyciąganie zaś pierwiastków nie może się udadź, tylko kiedy funkcyá iest potęgą zupełną: ale iakże poznáć czyli iest taką lub nie, w śrzod niewymiérnych wyrazów, które ią wiklą i zasłaniaią práwo potęg zupełnych?

Sposób rozeznawania potęg zupełnych w funkcyach niewymiernych.

S téy uwági nie możémy nie uczuć potrzeby szukaniá sposobu na rozeznanie potęg zupełnych w funkcyach pierwiástkowych. Każdą takową funkcyą nie zawiéraiącą tylko znaki pierwiástkowé *2go* stopnia wyrazić ogólnie możémy przez $A \pm \sqrt{B}$, gdzie wszystkié ilości wymiérné znaczą się przez A; wszystkié zaś niewymiérné przez $\sqrt{B}$. Ieżeli $A \pm \sqrt{B}$ iest zupełną potęgą drugą, iéy pierwiástek niech będzie wyrażony przez $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$; przeto $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{p} \pm \sqrt{q}$; $A \pm \sqrt{B} = p \pm 2\sqrt{pq} + q$; czyli (1) - - $A = p + q$; $\pm\sqrt{B} = \pm 2\sqrt{pq}$. - - (2) $B = 4pq$ - - $q = \frac{B}{4p}$, co włożywszy w (1) wypadnie: $p^2 - Ap = -\frac{B}{4}$ - - $p = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2}$

$q = A - p = \frac{A \mp \sqrt{(A^2 - B)}}{2}$; żeby więc $A \pm \sqrt{B}$, było potęgą zupełną, potrzeba żeby p, q, były funkcyami wymiérnémi; a przeto potrzeba żeby $A^2 - B$ było zupełną potęgą drugą. Iakóż w teraźniéyszym przypadku $A^2 - B = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$. Chcąc więc

doświadczyć

doświadczyć, czyli funkcyá iaká piérwiáſtkowá która ſię zamyká pod wzorém $A \pm \sqrt{B}$ ieſt zupełną potęgą drugą, náleży wiedziéć, czyli w niéy $\sqrt{(A^2 - B)}$ ieſt funkcyą wymiérną; ieżeli nie ieſt; funkcyá $A \pm \sqrt{B}$ nie będzié zupełną potęgą: ieżeli zaś $\sqrt{(A^2 - B)}$ ieſt piérwiáſtkiém zupełnym; funkcyá $A + \sqrt{B}$ będzie miałá za piérwiáſtek:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm\left[\sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)}\right].$$

funkcyá zaś $A - \sqrt{B}$ miéć będzie piérwiáſtek:

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \pm\left[\sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)}\right].$$

Przykład. Niech będzie funkcyá $5a^2 - b^2 \pm 4a.\sqrt{(a^2 - b^2)}$, o któréy chcémy wiedziéć, czyli ieſt potęgą zupełną lub nie? $A = 5a^2 - b^2$; $\sqrt{B} = 4a\sqrt{(a^2 - b^2)}$; $A^2 - B = 9a^4 + 6a^2b^2 + b^4$, potęga zupełná funkcyi $3a^2 + b^2$: więc $p = 4a^2$; $q = a^2 - b^2$, przeto funkcyá podaná ieſt zupełną potęgą drugą, któréy piérwiáſtki ſą $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm[2a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}]$. Tym ſpoſobém znáydziémy że wyráz liczebny $28 + 10\sqrt{3}$ ieſt potęgą drugą, któréy piérwiáſtki ſą $\pm(5 + \sqrt{3})$.

Ieżeli s funkcyi $A + \sqrt{B}$ chcémy wyciągnąć piérwiáſtek potęgi trzeciéy, potrzeba aby tén piérwiáſtek mógł bydź wyſtawiony pod takim wyrázém, któryby nie mógł wydadź iak tylko iedén niewymiérny termin w potędze trzeciéy. Przekonámy ſię zaś łatwo s krótkiéy uwági nad potęgami, że takowy piérwiáſtek nie może w ſobie zawiérać tylko iedén także niewymiérny termin, i że wyráz iego właściwy ieſt $p + \sqrt{q}$: wprowadziwſzy bowiem więcéy terminów niewymiérnych w piérwiáſtek n.p. $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, potęga trzeciá będzie miéć wſzyſtkié terminy niewymiérné, i nie będzie mogła bydź porównaną s funkcyą $A + \sqrt{B}$. Ale tén piérwiáſtek wyciągniony s funkcyi $A + \sqrt{B}$ nie będzież on mógł zawiérać znaku piérwiá-

ſtkowégo

ſtkowégo potęgi trzeciéy? Powinniśmy to barzo łatwo poiąć, że tákowy znak nie może ſię znaydować, chyba że ſama potęga $A+\sqrt{B}$, ieſt rozmnożona przez iaką ilość lub funkcyą n.p. $(A+\sqrt{B})m$, a na tén czás piérwiáſtek tákże będzie zawiérał funkcyą niewymiérną $\sqrt[3]{m}$, która równie będzie ſpólną wſzyſtkim iego terminom; to ieſt: $(p+\sqrt{q})\sqrt[3]{m}$.

Wróćmy ſię do piérwſzégo przypádku:

$$A+\sqrt{B}=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}.$$

równaiąc terminy niewymiérné i wymiérné s ſobą, mámy

$$(1) \text{ - - } A=p^3+3pq \text{ - - } (2) \text{ - - } \sqrt{B}=(3p^2+q)\sqrt{q}$$

$$A^2-B=(p^2-q)^3 \text{ - - - } \sqrt[3]{(A^2-B)}=p^2-q.$$

ieżeli więc $A+\sqrt{B}$ ieſt zupełną potęgą trzecią, powinno koniecznie A^2-B bydź tąż zupełną potęgą funkcyi p^2-q: nazwáwſzy $p^2-q=n$; $q=p^2-n$, i włożywſzy tę wártość za q w (1) otrzymámy zrównanie warunkowé:

$$4p^3-3np-A=0 \text{ - - - } (L).$$

s którégo náleży wyciągnąć wártość na p, w wyrazie wymiérnym: potrzebaby więc rozebrać zrównanie (L) na ſwé mnożniki wymiérné, czego nie we wſzyſtkich przypádkach potrafiémy dokázać.

Ieżeli $A+\sqrt{B}$ będzie zupełną potęgą mimo to, że A^2-B nią nie ieſt; na tén czás $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}$ ieſt rozmnożoné przez ſpólną iaką ilość piérwiáſtkową trzeciéy potęgi; rozdzieliwſzy ié więc przez tę ilość, wynáydziémy piérwiáſtek funkcyi $A+\sqrt{B}$, i na tén czás A^2-B będzie zupełną potęgą trzecią.

Uważaiąc na koniec $A\pm\sqrt{B}$ iako potęgę ſtopnia n, któréy piérwiáſtek wyráża ſię przez $p\pm\sqrt{q}$, mámy na to zrównanie:

$$A+\sqrt{B}=(p+\sqrt{q})^n$$
$$A-\sqrt{B}=(p-\sqrt{q})^n$$

Mnogość $\quad A^2-B=(p^2-q)^n.$

doświadczyć, czyli funkcyá iaká pierwiáſtkowá która ſię zamyká pod wzorém $A \pm \sqrt{B}$ ieſt zupełną potęgą drugą, należy wiedzieć, czyli w niéy $\sqrt{(A^2-B)}$ ieſt funkcyą wymierną; ieżeli nie ieſt; funkcyá $A \pm \sqrt{B}$ nie będzie zupełną potęgą: ieżeli zaś $\sqrt{(A^2-B)}$ ieſt pierwiáſtkiém zupełnym; funkcyá $A+\sqrt{B}$ będzie miałá za pierwiáſtek:

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}=\pm\left[\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}\right)}\right].$$

funkcyá zaś $A-\sqrt{B}$ miéć będzie pierwiáſtek:

$$\sqrt{p}-\sqrt{q}=\pm\left[\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}\right)}\right].$$

Przykład. Niech będzie funkcyá $5a^2-b^2 \pm 4a.\sqrt{(a^2-b^2)}$, o którey chcémy wiedzieć, czyli ieſt potęgą zupełną lub nie?

$A=5a^2-b^2$; $\sqrt{B}=4a\sqrt{(a^2-b^2)}$; $A^2-B=9a^4+6a^2b^2+b^4$, potęga zupełná funkcyi $3a^2+b^2$: więc $p=4a^2$; $q=a^2-b^2$, przeto funkcyá podaná ieſt zupełną potęgą drugą, którey pierwiáſtki ſą $\sqrt{p}+\sqrt{q}=\pm[2a\pm\sqrt{(a^2-b^2)}]$. Tym ſpoſobém znaydziémy że wyráz liczebny $28+10\sqrt{3}$ ieſt potęgą drugą, którey pierwiáſtki ſą $\pm(5+\sqrt{3})$.

Ieżeli s funkcyi $A+\sqrt{B}$ chcémy wyciągnąć pierwiáſtek potęgi trzeciéy, potrzeba aby tén pierwiáſtek mógł bydź wyſtawiony pod takim wyrázém, któryby nie mógł wydadź iak tylko iedén niewymiérny termin w potędze trzeciéy. Przekonámy ſię zaś łatwo s krótkiéy uwági nad potęgami, że takowy pierwiáſtek nie może w ſobie zawiérać tylko iedén także niewymiérny termin, i że wyráz iego właściwy ieſt $p+\sqrt{q}$: wprowadziwſzy bowiem więcéy terminów niewymiérnych w pierwiáſtek n.p. $\sqrt{p}+\sqrt{q}$, potęga trzeciá będzie mieć wſzyſtkié terminy niewymiérné, i nie będzie mogła bydź porównaną s funkcyą $A+\sqrt{B}$. Ale tén pierwiáſtek wyciągniony s funkcyi $A+\sqrt{B}$ nie będzież on mogł zawiérać znaku pierwiá-

ſtkowégo

ſtkowégo potęgi trzeciéy? Powinniśmy to barzo łatwo poiąć, że tákowy znak nie może ſię znaydowáć, chyba że ſama potęga $A+\sqrt{B}$, ieſt rozmnożoná przez iaką ilość lub funkcyą n.p. $(A+\sqrt{B})m$, a na tén czás piérwiáſtek tákże będzie zawiérał funkcyą niewymiérną $\sqrt[3]{m}$, która równie będzie ſpólną wſzyſtkim iego terminom; to ieſt: $(p+\sqrt{q})\sqrt[3]{m}$.

Wróćmy ſię do piérwſzégo przypádku:

$$A+\sqrt{B}=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}.$$

równaiąc terminy niewymiérné i wymiérné s ſobą, mámy

$$(1)\ \text{- -}\ A=p^3+3pq\ \text{- -}\ (2)\ \text{- -}\ \sqrt{B}=(3p^2+q)\sqrt{q}$$

$$A^2-B=(p^2-q)^3\ \text{- - -}\ \sqrt[3]{(A^2-B)}=p^2-q.$$

ieżeli więc $A+\sqrt{B}$ ieſt zupełną potęgą trzecią, powinno koniecznie A^2-B bydź tąż zupełną potęgą funkcyi p^2-q: nazwáwſzy $p^2-q=n$; $q=p^2-n$, i włożywſzy tę wártość za q w (1) otrzymámy zrównanie warunkowé:

$$4p^3-3np-A=0\ \text{- - -}\ (L).$$

s którégo náleży wyciągnąć wártość na p, w wyrazie wymiérnym: potrzebaby więc rozebrać zrównanie (L) na ſwé mnożniki wymiérné, czego nie we wſzyſtkich przypádkach potrafiémy dokázać.

Ieżeli $A+\sqrt{B}$ będzie zupełną potęgą mimo to, że A^2-B nią nie ieſt; na tén czás $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}$ ieſt rozmnożoné przez ſpólną iaką ilość piérwiáſtkową trzeciéy potęgi; rozdzieliwſzy ié więc przez tę ilość, wynáydziémy piérwiáſtek funkcyi $A+\sqrt{B}$, i na tén czás A^2-B będzie zupełną potęgą trzecią.

Uważaiąc na koniec $A\pm\sqrt{B}$ iako potęgę ſtopnia n, któréy piérwiáſtek wyráżá ſię przez $p\pm\sqrt{q}$, mámy na to zrównanie:

$$A+\sqrt{B}=(p+\sqrt{q})^n$$
$$A-\sqrt{B}=(p-\sqrt{q})^n$$

Mnogość

$$A^2-B=(p^2-q)^n.$$

co nás ogólnie uczy, że ieżeli $A \pm \sqrt{B}$ má bydź zupełną potęgą n, potrzeba koniecznie aby funkcyá $A^2 - B$ była táż sámą potęgą $p^2 - q$: nazwáwszy $p^2 - q$, k; włożémy za $q = p^2 - k$ w zrównanie na A, i otrzymámy inné wárunkowé stopnia n, s którém náleży się tak obéyśdź iak z zrównaniém (L) aby wynaleśdź p.

Służy nám ieszcze tén sám sposób do wyciągania pierwiástków s funkcyi zamykaiących więcéy terminów niewymiérnych. Ieżeli té pierwiástki wyrażémy przez $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, albo przez $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; náleży nám uważyć, że potęga drugá s takowégo pierwiástku powstaiącá tylé będzie zawiérać terminów niewymiérnych, ilé wypadnie mnogości z dwóch na ráz pierwiástka terminów; znak bowiém pierwiástkowy nie zniknie, tylko w samych czystych potęgach każdégo terminu poiedynczégo: i tak n.p. trzy terminy, s których albo wszystkié albo dwa tylko pierwiástkowé, wydadzą koniecznie trzy terminy niewymiérné w potędze drugiéy: cztéry terminy niewymiérné pierwiástka, zrodzą sześć niewymiérnych w potędze: n terminów piérwiástka, s ktorychby albo żadén albo ieden tylko był wymiérny, wydadzą $\frac{n(n-1)}{1.2}$ terminów niewymiérnych w potędze. Chcac więc wystawić potęgę drugą piérwiástka $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, albo $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; wyrazić ią muszémy przez $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = p + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} + q + r$; więc - - - $A = p + q + r$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{pq}$; - - - $\sqrt{C} = 2\sqrt{pr}$; - - - - $\sqrt{D} = 2\sqrt{qr}$, s kąd wypádá $q = \frac{B}{4p}$ - - $r = \frac{C}{4p}$, - - $r = \frac{D}{4q}$, włożywszy za q, r, ich wártości w piérwszé, otrzymámy $A = p + \frac{B}{4p} + \frac{C}{4p}$; czyli - - -

$$p^2 - Ap = -\frac{B+C}{4} \quad - - \quad p = \frac{A + \sqrt{(A^2 - B - C)}}{2}$$ skąd łatwo

łatwo wynaleśdź q, r. Ieżeli więc $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$, ieſt zupełną potęgą drugą; p powinno bydź wymiérném, a zatém A^2-B-C bydź także powinno zupełną potęgą drugą. Iakóż w teraźnieyſzym przykładzie $A^2-B-C=(p+q+r)^2-4pq-4pr=(p-q-r)^2$.

Oprócz tego warunku zoſtaie ieſzcze ieden pochodzący z dwóch wártości różnych na r, to ieſt: $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$.

Żeby więc funkcyá podaná miała za pierwiáſtek $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, potrzeba náprzód, żeby A^2-B-C było zupełną potęgą drugą; powtóre; żeby - - - - - $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$. Zobáczmy to w przykładzie.

Niech będzie wyráz liczebny $28+\sqrt{320}+\sqrt{448}+\sqrt{140}$, o którym chcémy wiedziéć, czyli ieſt zupełną potęgą drugą, i iaki ieſt iego pierwiáſtek? W nim $A=28$, $B=320$; $C=448$, $D=140$ - - $A^2-B-C=16$, którégo pierwiáſtek 4; więc $p=\frac{A+\sqrt{(A^2-B-C)}}{2}$ $=16$, $q=\frac{B}{4p}=5$, - - $r=\frac{C}{4p}=7$; $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$ czyli $7=7$. więc pierwiáſtek podanégo wyrazu ieſt $\pm(4+\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

Należy nám tu uczynić iednę przeſtrogę, że równaiąc przykład iaki podany z wzórém ogólnym, może ſię czaſém nie udadź która kondycyá w iednem nazwiſku, ale ſię uda w nazwiſku innem, i dlá tego ieżeli z nadanych wártości A,B,C,D, nie wypadną warunki właściwé pytaniu; nie należy w przód ſtanowić, że funkcyá podaná nie má pierwiáſtku, póki nie przéydziémy przez wſzyſtkié odmiany któré wypaśdź mogą z różnych nadanych wártości ilościom pierwiáſtkowym: i tak n. p. maiąc wyráz liczebny $10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$ nie wypadną nám obydwa warunki nazwáwſzy $A=10$, $B=24$, $C=40$, $D=60$, ponieważ na $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$ otrzy-

mamy $s=80$: ale ieżeli nazwiemy $A=10, B=40, C=60, D=24$, obydwie kondycye będą miały mieysce, i pierwiastek podanego wyrazu będzie: $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Maiąc do rospoznania funkcyą podaną, ktorey obydwa terminy byłyby pierwiastkowe: n.p. $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. potrzebaby nam dobrać takiego wyrazu w pierwiastku, któryby w drugiey potędze wydał dwa tylko terminy, obydwa zaś z znakiem pierwiastkowym. Takowy pierwiastek wyrazi się barzo dobrze przez $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}$; maiąc bowiem iednego mnożnika spolnego, dwa terminy złączą się razem; i potęga drugą takowego pierwiastku będzie: $(p+q)\sqrt{r}+2\sqrt{pqr}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$, a zatem $(p+q)^2r=A$, - - $4pqr=B$ - - $A-B=(p+q)^2r-4pqr=(p-q)^2r$. ieżeli więc $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ma bydź zupełną potęgą drugą, powinno $A-B$ bydź potęgą drugą kilkokrotną, czyli rozmnożoną przez iaką liczbę r. Dwa stąd otrzymane zrównania

$$\sqrt{(A-B)}=p\sqrt{r}-q\sqrt{r}.$$
$$+\sqrt{A}=p\sqrt{r}+q\sqrt{r}.$$

dodaiąc lub odciągaiąc od siebie; dostąpiemy

$$p\sqrt{r}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2}$$

$$q\sqrt{r}=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}$$

s których powstaie pierwiastek funkcyi $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

$$\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}\right)}.$$

Użycie tego samego sposobu w funkcyach uroionych.

Doświadczmy ieszcze tego sposobu w funkcyach uroionych. Wystawmy sobie funkcyą uroioną zamykaiącą znaki pierwiastkowe samey potęgi drugiey, w wzorze ogólnym $A+\sqrt{-B}$. gdzie B iest koniecznie dodatne: a stosuiąc do niey te same uwagi, któreśmy uczynili nad $A+\sqrt{B}$, wynaydziemy, że

$$\sqrt{(A+\sqrt{-B})}$$

$$\sqrt{(A+\sqrt{-B})}=\pm\left[\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}\right] \quad - - - (M).$$

ieżeli więc funkcyá uroioná $A+\sqrt{-B}$ ieſt zupełną potęgą drugą; muſi koniecznie A^2+B bydź takąż potęgą: piérwſzy termin tego piérwiáſtku - - - $\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}$, ieſt funkcyą rzetelną, którą możémy wyrazić przez a; drugi termin . - - $\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}$ ieſt uroiony; poniéważ $A<\sqrt{(A^2+B)}$; wyrazić on ſię może przez $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(A^2+B)}-A}{2}\right)}.\sqrt{-1}$ $=b\sqrt{1}$. gdzie b znaczy ilość rzetelną. Piérwiáſtek więc uroionéy funkcyi wyrazić ſię może przez $a+b\sqrt{-1}$, gdzie a, b, ſą ilościami koniecznie rzetelnémi.

Maiąc ſobie podaną funkcyą uroioną $\sqrt{\sqrt{-C}}=\sqrt[4]{-C}$ a równaiąc ią z wzorém $A+\sqrt{-B}$, będzie $A=0$; $B=C$, a wártość $\sqrt[4]{-C}$ z zrównaniá (M) wyciągaiąc, znáydziémy $\sqrt[4]{-C}=\sqrt[4]{\left(\frac{C}{4}\cdot(1+\sqrt{-1})\right)}$, co także wyrazić możémy przez $a+b\sqrt{-1}$ uczyniwſzy $a=\sqrt[4]{\frac{C}{4}}=b$.

Niech będą funkcye: $\sqrt{(\sqrt[4]{-C})}=\sqrt[8]{-C}$; $\sqrt{\sqrt[8]{-C}}=\sqrt[16]{-C}$, i t. d. poniéważ $\sqrt[4]{-C}$ iuż przywiedliśmy do wyrazu $a+b\sqrt{-1}$, będzie $\sqrt[8]{-C}=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$ $=\pm\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}\right)}\sqrt{-1}$ który także należy do wzoru $a+b\sqrt{-1}$, wziąwſzy $\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right)}$ za a; $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}\right)}$, za b;

tym ſpoſobém poſtępuiąc ſobie przekonámy ſię, że wſzyſtkié funkcye uroioné, maiącé wykładnika $2k$; k znacząc liczbę párzyſtą, przywiedzioné bydź mogą do wyrazu $a+b\sqrt{-1}$.

Ieżeli k będzie liczbą niepárzyſtą, $2k$ będzie zawſze párzyſtą: ale że wykładniki párzyſté 6, 10, 14, 16, 18, i t. d. uważać ſię mogą iako powſtaiącé z rozmnożeniá liczby niepárzyſtéy przez párzyſtą; funkcye uroioné, s takiémi wykładnikami $\sqrt[6]{-C}$, $\sqrt[10]{-C}$, i t. d. będą równé $\sqrt{(\sqrt[3]{-C})}$, $\sqrt{(\sqrt[5]{-C})}$, i t. d. A że $\sqrt[3]{-C}=-\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[5]{-C}=-\sqrt[5]{C}$, $\sqrt[7]{-C}=-\sqrt[7]{C}$ i t. d. nazwáwſzy $\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[5]{C}$, $\sqrt[7]{C}$, b^2; wyrazy uroioné $\sqrt[6]{-C}$, $\sqrt[10]{-C}$, i t. d. ieſzcze należéć będą do wzoru ogólnégo $a+b\sqrt{-1}$. Wnieśmy więc że wſzyſtkié funkcye uroioné z wykładnikiém $2k$, k będąc párzyſtą lub nie párzyſtą liczbą, wyrazić ſię mogą przez wzór ogólny $a+b\sqrt{-1}$.

Ieżeli funkcyá podáná $A+\sqrt{-B}$ będzie potęgą nie párzyſtą zamykaiącą pierwiáſtki częścią rzetelné, a częścią uroioné, obéyśdź ſię z nią będziém mogli podług tych ſamych prawideł, któré nám ſłużyły na $A+\sqrt{B}$. Wſzakże pierwiáſtki nawet potęg niepárzyſtych wyraziliśmy przez $p+\sqrt{q}$; więc ieżeli teráz wyrażémy potęgę iakąkolwiek niepárzyſtą przez $A+\sqrt{-B}$, pierwiáſtek iéy będzie $p+\sqrt{q}$ ogarniaiący razém wártości rzetelné i uroioné; a zatém funkcye nawet któré w potęgach niepárzyſtych zawiéraią pierwiáſtki rzetelné zmięſzáné z uroionémi, przywiodą ſię do wzoru $a+b\sqrt{-1}$. Wyſtáwmy ſobie n. p. trzecią potęgę w funkcyi $A+\sqrt{-B}$ któréy pierwiáſtek wyráźmy przez $r+s$, pamiętaiąc że s zamyká w ſobie znak pierwiáſtkowy drugiéy potęgi. Będzie więc $A+\sqrt{-B}=r^3+3r^2s+3rs^2+s^3$; ponieważ znak pierwiáſtkowy nie mógł zniknąć w potęgach niepárzyſtych s; równáymy z $\sqrt{-B}$ wſzyſtkie terminy, gdzie s ieſt

ieſt wymiaru nieparzyſtego, wſzyſtkié zaś inné z A; otrzymamy - - $r^3+3rs^2=A$; - - $3r^2s+s^3=(3r^2+s^2)s$ $=\sqrt{-B}$. - - $B=-(3r^2+s^2)^2s^2$: dwa té zrównania złączone s ſobą dadzą wártość na r, s, tak; aby $A+\sqrt{-B}$ było zupełną potęgą trzecią maiącą za pierwiáſtek $r+s$. Aże z wyżéy iuż wyłożonych warunków A^2+B bydź powinno zupełną potęgą trzecią, ieżeli nią ieſt $A+\sqrt{-B}$; otrzymámy naprzód s téraźniéyſzych na A, B, wártości, $\sqrt[3]{(A^2+B)}=r^2-s^2$: powtóré otrzymámy zrównanie warunkowé któréśmy wyżéy nazwali (L) - - $4r^3-3nr-A=o$. gdzie $n=r^2-s^2$.

To zrównanie maiąc drugi termin odiemny, będzie miało wſzyſtkié trzy pierwiáſtki rzetelné, s których ieden wyrazić możémy przez a: wypadnie powtóré $s^2=\frac{-B}{(3r^2+s^2)^2}$, a włożywſzy za s^2, iego wártość r^2-n; $s^2=\frac{-B}{(4r^2-n)^2}$ wártość koniecznie odiemná, ponieważ B w teraźniéyſzém przypuſzczeniu ieſt koniecznie dodátném; mianownik także z natury ſwoiéy dodátnym, więc $s=\frac{\sqrt{B}}{4r^2-n}$. $\sqrt{-1}$. co ſię wyrazić może przez $b\sqrt{-1}$, biorąc za b ilość rzetelną $\frac{\sqrt{B}}{4r^2-n}$.

S tych więc wſzyſtkich przypádków wypádá prawda ogólná: że wſzyſtkié funkcye uroioné wyrazić ſię mogą przez wzór $a+b\sqrt{-1}$. Niżeli rosciągniémy daléy użycie dopiéro wyłożonéy prawdy, przychodzi nám tu uczynić króciuteńką uwagę o zrównaniach 3go ſtopnia. Wiémy, że ilé razy té zamykaią wſzyſtkié pierwiáſtki rzetelné, prowadzą nás do przypádku nieprzywiedlnégo, w którym pierwiáſtki pokazuią ſię pod wyrazém uroionym prowadzącym nás do ſzeregów nieſkończonych.

Ale ieżeli iaki pierwiáſtek będzie przy ſwoim uroionym wyrazie zupełną potęgą trzecią, wyciągnąwſzy z niego pierwiáſtek *3ciey* potęgi ſpoſobem teraz wyłożonym, przyidziemy do wyrazu ſkończonego trzech rzetelnych wártości na ilość nieznaną. n. p. Maiąc zrównanie $x^3-6x+4=0$, i rozwiązáwſzy ie podług §. 28. otrzymámy - - - $x=\sqrt[3]{(-2+2\sqrt{-1})}+\sqrt{(-2-2\sqrt{-1})}$, chcąc wiedzieć czyli drugi członek tego zrównaniá ieſt zupełną potęgą trzecią, i wynaleśdź iego pierwiáſtek; równám go s funkcyą $A\pm\sqrt{B}$, będzie więc $A=-2$, $\sqrt{B}=2\sqrt{-1}$ - - $A^2=4$, $B=-4$ $A^2-B=8$, którego pierwiáſtek $\sqrt[3]{(A^2-B)}=2=n$: kładę tę wártość za n w zrównanie warunkowe (L), i ſtaie ſię - - $4p^3-6p+2=0$. które ieſt rozdzielne przez $p-1=0$: więc $p=1$, $q=p^2-n=-1$, a zatem pierwiáſtek $p+\sqrt{q}=\sqrt[3]{(-2+2\sqrt{-1})}=1+\sqrt{-1}$. Tym ſpoſobem znáydziemy że $\sqrt[3]{(-2-2\sqrt{-1})}=1-\sqrt{-1}$; przeto $x=1+\sqrt{-1}+1-\sqrt{-1}=2$: rozdzieliwſzy zrównanie podane przez $x-2$, zniżemy ie o ieden ſtopień $x^2+2x-2=0$, którego pierwiáſtki rzetelne ſą $x=-1+\sqrt{3}$, - - $x=-1-\sqrt{3}$. Zrównanie więc *3go* ſtopnia chociáż będzie w przypádku nieprzywiedlnym, może iednak mieć pierwiáſtki wyrażone ſpoſobem ſkończonym, ale tylko w ten czás, kiedy iego wártości ſą zupełnemi potęgami trzeciemi, co będąc tylko przypádkiem ſzczególnym i rzadkim, dowodzi ieſzcze niedoſkonałość prawideł, które nám w tey mierze ſłużą.

§. XXXI.

Ogólny ſpoſob rozeznaniá pierwiáſtków uroionych w zrównaniu.

Doſzedłſzy wyrazu ogólnego pierwiáſtków uroionych w zrównaniu lub funkcyi, wypadá nám tu bárzo porządne iego użycie, ſłużące do rozeznaniá czyli zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia má pierwiáſtki uroione lub nie? każdy bowiem dotąd ſtopień zrównaniá potrzebowáł od nás ſzczególnych ſpoſobów

na

na rozpoznanie piérwiáſtków rzetelnych lub uroionych któréśmy dopiero rozwiązáwſzy zrównanie, wyciągali. Maiąc zaś wyráz ogólny zrównaniá iakiégokolwiek ſtopnia $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+$ i t. d. $+k=o$, i wyráz ogólny piérwiáſtku uroionégo $x-a-b\sqrt{-1}=o$, możémy z dwóch tych ogólnych wyrazów wyciągnąć trzeci, który będzie ſamé piérwiáſtki uroioné w zrównaniu oznaczał. Trzymáymy ſię tylko w tém dociekaniu drogi Analityczney, która nás iuż do tak wielu práwd ſzczęśliwie przywiodła; to ieſt: uważáymy rzecz nieznaną iak gdyby była znaná: a wiążąc warunki pytaniá z ogólnémi początkami ſtaráymy ſię przyiśdź do proſtych zrównán i ſtóſunków, s którychby wypaśdź mogły wártości rzeczy nieznanych.

Każdy piérwiáſtek uroiony w zrównaniu wyráżá ſię przez $x-a-b\sqrt{-1}=o$, tak iako każdy mnożnik uroiony w funkcyi przez $x-a-b\sqrt{-1}$; ale że w tym wyrazie b koniecznie powinno bydź ilością lub funkcyą rzetelną; albo będąc uroioném, nie powinno bydź rozdzielné przez $\sqrt{-1}$: albowiem termin $b\sqrt{-1}$ nie mógł powſtać tylko z zrównaniá rozwiązanégo, któré zawiérało b z wykładnikiém párzyſtym, n. p. b^2. To b^2 albo ieſt ſamo rzetelném albo uroioném; w piérwſzym przypádku dáymy że wártości różné b^2 ſą m, m' i t. d. tak dalece że $b=\sqrt{m}$, $b=\sqrt{m'}$, czyli $b=\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-1}}$, $b=\frac{\sqrt{-m'}}{\sqrt{-1}}$; wyráz ogólny piérwiáſtku uroionégo daie $x=a+b\sqrt{-1}$, czyli $x=a+\sqrt{-m}$, $x=a+\sqrt{-m'}$, gdzie widzémy, że potrzeba, aby $-m$, $-m'$ były koniecznie dodátné ieżeli x má bydź rzetelném, to ieſt potrzeba aby b było funkcyą uroioną: i przeciwnie żeby x było uroioném, potrzeba aby $-m$, $-m'$ było odiemném to ieſt, aby b było rzetelném. Ieżeli zaś ſamo b^2 ieſt uroioném, n. p. $b^2=\frac{m}{\sqrt{-1}}$, $b=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{-1}}$, $x=a+\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt[4]{-1}}$, żeby

 więc

więc x było uroioném w tén czás, kiedy b iest także uroioném, potrzeba aby b nie było całkiém rozdzielné przez $\sqrt{-1}$.

Piérwiáftki rzetelné lub uroioné w zrównaniu są to wártości rzetelné lub uroioné na x, té zaś wártości x zawisły od wártości b, idzie za tém, że chcąc się dowiedziéć czyli zrównanie podané má piérwiáftki uroioné lub nie? należy w nie za x i iego potęgi włożyć wártość uroioną $x=a+b\sqrt{-1}$; a tak zamieniwszy zrównanie podané na inné między a, b, i ilościami znanémi; należy rostrząsnąć wszystkié stąd powstać mogącé wártości na b, s tych sądzić o wártościach x, a zatém o piérwiáftkach zrównania podanégo. Ale a, b, stáią się ilościami nieznanémi wprowadzonémi na miéysce x, s kądże ich oznaczyć wártości lub związek? Chcąc na to odpowiedziéć uważmy, że kładąc w zrównanie podané za x, $a+b\sqrt{-1}$, przerobiémy ié na inné takié, w ktorém będą terminy rzetelné i uroioné; aże zrównanie przerobioné iedno bydź powinno s podaném; wszystkié terminy uroioné należy zniszczyć, to iest uczynić zbiór tych wszystkich, które są rozmnożoné przez $\sqrt{-1}$, równy zero. A tak otrzymámy dwá zrównániá, które nazwiémy *Wypádkowémi*: z nich iedno służyć będzie na oznaczenie a, drugié na b. Aże piérwiáftki rzetelné lub uroioné w zrównaniu zawisły od pewnych wártości i stósunków ilości znanych; potrzeba nám z zrównań wypádkowych prócz a, b, wyciągnąć związek między ilościami znanémi na piérwiáftki uroioné. Nadáwszy więc podług upodobania pewną iaką wártość na a, wyciągniémy z iednégo zrównaniá wypádkowégo odpówiadaiącą wártość na b; té zaś dwie wártości włożywszy w drugié zrównanie wypádkowé, odkryiémy związek między ilościami znanémi wyrażaiący potrzebné warunki, aby zrównanie podané miało piérwiáftki uroioné.

Takowé warunki w ilościach znanych moglibyśmy otrzymać przez wártość na a, b wyciągnioną z związku

ku zawartégo w zrównaniach wypádkowych; ale na to trzebaby nám rozwiązać obydwa té zrównaniá, przez co dociekaniá naſzé ſkończyłyby ſię na tych tylko zrównaniach, któré teráz ieſteśmy w ſtanie rozwiązać. Trzeba nám więc przeſtać raczéy na piérwſzym ſpoſobie iako rozległéyſzym i niezawiſłym od rozwiązaniá zrównáń. Zebyśmy tém mocniéy uczuli iego użycie, nie zgubmy tego z myśli, że kiedy z zrównáń wypádkowych otrzymámy na b wártość rzetelną; zrównanie podané będzie miało piérwiáſtki uroioné: kiedy zaś b będzie uroionému; zrównanie zamyká pierwiáſtki rzetelné. Wyſtáwmy ſobie teráz, że zrównaniá wypádkowé nie tylko nás nauczą kiedy b ieſt rzetelném lub uroioném, ale nám nawet oznaczą moment, kiedy przechodzi z wartości rzetelnéy na uroioną lub przeciwnie; oddzieliwſzy tém przeyściém klaſsę piérwiáſtków rzetelnych od klaſsy uroionych, rozwiązanie zrównaniá byłoby nám w tym razie niepotrzebné, bo ſamá uwága nad wſpółczynnikami nauczyłaby nás o gatunku piérwiáſtków. Té wſzyſtkié rozumowaniá daleko ſię oczywiściéy pokáżą w rachunku. Niech będzie zrównanie podané, s którégo dlá łátwiéyſzégo rachunku pozbyliśmy ſię *2go* terminu:

$$x^m+px^{m-2}+qx^{m-3}+rx^{m-4}+ \text{ i t. d. } +k=0,$$

kładąc w niém za x, $a+b\sqrt{-1}$; wypadnie

$$x^m=a^m+ma^{m-1}b\sqrt{-1}-m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}b^2-m.\frac{(m-1)(m-2)}{2.\quad 3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1}+\text{ i t. d. }\pm b^m\sqrt{(-1)^m}$$

$$+px^{m-2}=pa^{m-2}+p\frac{(m-2)}{1}a^{m-3}b\sqrt{-1}-p\frac{(m-2)}{1.}\frac{(m-3)}{2}a^{m-4}b^2-p\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\quad 2.\quad 3}a^{m-5}b^3\sqrt{-1}$$

$$+\text{ i t. d. } \text{ - . - - } \pm pb^{m-2}\sqrt{(-1)^{m-2}}$$

$$+qx^{m-3}=qa^{m-3}+\text{ i t. d. } \text{ - - } \pm qb^{m-3}\sqrt{(-1)^{m-3}}$$

$$+\text{ i t. d. } +k=0.$$

Wykładnik m bydź może párzyſty albo nieparzyſty. Ieżeli ieſt párzyſtym, $\sqrt{(-1)^m}=\pm 1$ to ſamo mowić należy o $\sqrt{(-1)^{m-2}}$, $\sqrt{(-1)^{m-4}}$ i t.d. náywyżſzá więc potęga b mnożoná przez $\sqrt{-1}$ w x^m, będzie b^{m-1}; w x^{m-2}, b^{m-3}; i t. d. S tych wſzyſtkich terminów powſtanie iedno zrównanie warunkowe (A), które zamykaiąc we wſzyſtkich terminach b, będzie mogło przez nie bydź rozdzielone, a przeto potęgi b w tem zrównaniu będą b^{m-2}, b^{m-4}, b^{m-6}, i t.d. Zrównanie więc ſłużące na oznaczenie b będzie o dwa ſtopnie niżſze od podanego, i ieżeli ieſzcze ſzukać będziemy podwóynych wártości na b, dla tego że pierwiáſtki uroione ſą zawſze w liczbie párzyſtey, trudność náſza w ſzukaniu b będzie ſtopnia $\frac{m-2}{2}$. W drugiem zrównaniu warunkowem, które nazywám (B) będą potęgi b: b^m, b^{m-2}, b^{m-4} i t. d. a zatem trudność ſtopnia $\frac{m}{2}$.

Ieżeli zaś m ieſt niepárzyſte $\sqrt{(-1)^m}$, $\sqrt{(-1)^{m-2}}$, $\sqrt{(-1)^{m-4}}$, i t.d. będąc równe $\pm 1.\sqrt{-1}$; ilości zaś $\sqrt{(-1)^{m-3}}$, $\sqrt{(-1)^{m-5}}$, i t. d. $=\pm 1$. Zrównanie więc wypádkowe (A) będąc całe rozdzielne przez b będzie zawierało potęgi b^{m-1}, b^{m-3}, b^{m-5}, i t. d. i nie zniży ſię tylko o ieden ſtopień; w drugiem także zrównaniu warunkowem, b znaydować ſię będzie w potęgach b^{m-1}, b^{m-3} i t. d. a zatem trudność w obudwóch będzie iednego ſtopnia co do b. W pierwſzym i drugim przypádku b zawſze ſię znáyduie w ſtopniu párzyſtym; co właśnie zgádzá ſię z naturą pierwiáſtków uroionych. Przyſtoſóymy te wſzyſtkie uwági do zrównań 3go ſtopnia: pozbywſzy ſię 2go terminu, zrównanie podane będzie:

Stóſowanie po przedzaiącey teoryi do zrównań 3go ſtopnia.

$x^3+px+q=0$. kładąc za x, $a+b\sqrt{-1}$; przerobiemy ie na

$$\left.\begin{array}{l} a^3+3a^2b\sqrt{-1} \\ -3ab^2-b^3\sqrt{-1} \\ +ap \quad +bp\sqrt{-1}. \\ +q \end{array}\right\}=0.$$ s którego powſtaią dwa zrównaniá wypádkowe: (B)

(B) - - $a^3+(p-3b^2)a+q=o$, (A) - - $b^2-3a^2-p=o$. włożywszy za b^2 wártość z (A) w zrównanie (B); otrzymámy zrównanie iednégo stopnia s podaném - - (C) $2a(4a^2+p)-q=o$: od rozwiązaniá iégo, zawisło rozwiązanie zrównaniá podanégo, i dlá tego nazwać ié możémy *Rozwięzuiącém*.

Rostrząśniymy teráz różné wártości na b któré wyniknąć mogą z różnych przypuszczeń wciągnionych w zrównaniá wypádkowé. Naprzód (A) daie $b=\pm\sqrt{(3a^2+p)}$, uczyniwszy $a=o$, wypádá z (B) $q=o$. $b=\pm\sqrt{p}$. Ieżeli p iest dodátném, b będzie koniecznie rzetelném, i zrównanie podané będzie miéć dwá piérwiástki uroioné, co się zgádzá z doświádczéniém rachunku: ieżeli zaś p będzié odiemném, b będzie uroioném, i zrównanie podané má piérwiástki rzetelné.

Niech a nie będzie zero; $b=\sqrt{(3a^2+p)}$: ieżeli p iest dodátném, iakiémkolwiek będzié a zawsze b będzie rzetelném, i zrównanie podané będzie miało wszystkié piérwiástki uroioné; wszystkié bowiem kombinacye między a, b, ogárniaią w sobie wszystkié kombinacye między p, q; więc iakikolwiek záydzie stósunek między p, q, byleby p było dodatném, zrównanie podané będzie miało koniecznie dwa piérwiástki uroioné.

Ieżeli p iest odiemném, b nie koniecznie iest rzetelném, i zrównanie nie koniecznie má piérwiástki uroioné: záleży to bowiem od stósunku między p i $3a^2$; to iest: ieżeli $3a^2>p$, zrównanie má dwa piérwiástki uroioné; ieżeli zaś $3a^2<p$; b iest uroioném, i zrównanie má piérwiástki rzetelné. Kiedy zaś $3a^2=-p$, czyli $a=\sqrt{-\frac{p}{3}}$; $b=o$ i zrównanie iest w samém przéyściu s piérwiástków rzetelnych na uroioné lub przeciwnie: włożywszy za a iégo wártość $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ w zrównanie warunkowé (B), otrzymámy: $\frac{2p}{3}$

$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q=0$, czyli znióſſzy znak piérwiáſtkowy

(D) - - $4p^3+27q^2=0$.

Zrównanie daiącé nám związek między iłościami znanémi p, q, w tén czás, kiedy dwa piérwiáſtki przechodzą z uroionych na rzetelné, lub z rzetélnych na uroioné. W tym momencie $b=0$, $x\mp\sqrt{-\frac{p}{3}}$ ieſt mnożnikiém zrównaniá.

Ale na cóż nám ſię zdá wiedziéć warunek przéyściá piérwiáſtków z iednégo rodzaiu na drugi, ieżeli tén wárunek nie nauczy nás o ſtánie piérwiáſtków w innych przypádkach. Szukáymy czyli funkcyá $4p^3+27q^2$ w (D) wchodzącá, nie odkryie nám iakiéy cechy na piérwiáſtki zrównaniá. Na tén koniec trzeba znowu b wrócić dáwną wártość $b=\sqrt{(3a^2+p)}$: niech będzie $3a^2+p=y$, - - $3a^2+p-y=0$ (E). gdzie nám trzeba pamiętać, że kiedy zrównanie má piérwiáſtki uroioné, y koniecznie bydź powinno dodatném: że y ieſt iſtotnie odiemném, kiedy zrównanie má wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné. Ieſt zaś y dodatném lub odiemném podług iuż wyłożonégo ſtanu i ſtóſunku między a, i p, s którégo wyniká ſtóſunek iłości znanych p, q, zawarty w zrównaniu wypádkowém (B). Kombinuiąc zrównaniá (A), (B), otrzymaliśmy byli (C) - - - $2a(4a^2+p)-q=0$ któré wynióſſzy do drugiéy potęgi, wypádá: $4a^2(4a^2+p)^2-q^2=0$, w to teráz kładąc za a^2 wártość wyciągnioną z (E) to ieſt: $a^2=\frac{y-p}{3}$, $4a^2+p=\frac{4y-p}{3}$, otrzymámy: $\frac{(4y-4p)(4y-p)^2}{3\cdot 3^2}-q^2=0$. czyli wykonáwſzy mnożenie: $4y(4y-3p)^2-4p^3-27q^2=0$ (F). S tego oſtatniégo mámy: $4p^3+27q^2=4y(4y-3p)^2$, gdzie widzémy, że iakiémkolwiek ieſt y dodatném lub odiemném; $(4y-3p)^2$ zawſze ieſt s ſwéy natury dodatném, a zatém znak $4p^3+27q^2$ zawiſſ iedynie od

mnożnika

mnożnika $4y$; ieżeli y ieſt dodatném, $4p^3+27q^2$ będzie także koniecznie dodatném; lecz kiedy y ieſt dodatném, b ieſt rzetelném i zrównanie podané 3go ſtopnia má dwa piérwiáſtki uroioné podług (E). *Powtóré* y będąc odiemném, w zrównaniu (F) -- $(4y-3p)^2$ będzie dodatném, lecz $4p^3+27q^2$ ſtaie ſię odiemném. Aże kiedy y ieſt odiemném, b ſtaie ſię uroioném i zrównanie 3go ſtopnia má wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné; więc zrównanie 3go ſtopnia má koniecznie wſzyſtkié piérwiáſtki rzetelné, kiedy $4p^3+27q^2$ ieſt odiemném. Owóż práwdziwé znamie piérwiáſtków rzetelnych lub uroionych w zrównaniu iakiémkolwiek 3go ſtopnia! $4p^3+27q^2$ będąc odiemné, pokazuie piérwiáſtki rzetelné; będąc zaś dodátné wytyká piérwiáſtki uroioné: będąc zero, oznaczá momént przéyściá piérwiáſtków rzetélnych na uroioné, lub uroionych na rzetelné. Winniśmy tę tak piękną prá-wdę s całą teoryą zacnému dziś Geometrze Imci P. *du Sejour* Konſyliárzowi Parlamentu Paryzkiégo, który ią podáwſzy w pamiętnikach Akademii na Rok 1772, barzo dowcipnie do linii krzywych przyſtóſował. Spoſób atoli którégo w tém dociekaniu użył, iuż był dáwniéy od I.P *Eulera* wytknięty, iako będziém mieli ſpoſobnosć przekonać ſię o tém niżéy.

Nie opuſzczáymy dalſzych uwág, któré nám poddać może zrównanie (F). Położywſzy w niém $4p^3+27q^2=0$, dwa mnożniki drugiégo członka (F) daią $y=0$, albo $4y-3p=0$. Ponieważ zaś $4p^3+27q^2=0$ oznaczá czas przéyściá piérwiáſtków z iednégo rodzaiu do drugiégo, kiedy bydź powinno $b=0$, tému przéyściu zupełnie odpowiadá piérwſzy mnożnik $y=0$; ale $4p^3+27q^2$ może bydź także zero,

Ułatwiá ſię trudność zachodzącá w zrównaniach wypádkowych.

kiedy $4y-3p=0$, czyli $y=\frac{3p}{4}$, pod tén czás b nie

będzie zero, ale $=\pm\sqrt{\frac{3p}{4}}$, $a=\sqrt{\frac{-p}{12}}$, iako nás

uczą zrównaniá (E), (A): co nám pokazuie, iż w pewnych

wnych przypádkach $4p^3+27q^2$ może się stać zero; chociaż pierwiáſtki nie będą w momencie przeyściá z rzetelnych na uroione lub przeciwnie. Do czegóż więc stósowáć ten przypádek w zrównaniu, i iak zgodzić s sobą te tak dziwáczne wypádki? Imć P. *du Sejour* barzo nám to dowcipnie tłómaczy:

Niech m, m', m'', znaczą trzy pierwiáſtki zrównaniá *3go* stopnia, s których każdy wyráżá się przez $x-a-b\sqrt{-1}=0$, zrównanie wypádkowe *(A)* nie oznaczá nám s tych pierwiáſtków tylko dwa, które położywſzy $b=0$, ſtáią się obydwa równe, i pokazuią moment przeyściá z iednego rodzaiu do drugiego; więc pierwſzá prawda która nám się tu pokazuie ieſt: iż pierwiáſtki w ten czás tylko są w czaſie przeyściá z rzetelnych na uroione lub przeciwnie, kiedy dwa pierwiáſtki dane przez zrównanie *2go* stopnia *(A)* są równe, czyli, kiedy dwa pierwiáſtki równe náleżą do iednego zrównaniá i są że ták rzekę tey ſamey páry.

Ale $4p^3+27q^2$ ieſt zawſze zero, ile razy dwa pierwiáſtki w zrównaniu *3go* stopnia są równe: mogą zaś bydź równe albo te, które náleżą do tey ſamey páry i są dane przez zrównanie *(A)*; albo te s których ieden tylko náleży do zrównaniá *2go* stopnia, a drugi nie: co żebyśmy łatwiey poięli, wyſtáwmy sobie, że dwa pierwiáſtki m, m' są tey ſamey páry dane obydwa przez zrównanie *2go* stopnia, które ſtáwſzy się równe, czynią $4p^3+27q^2=0$, i oznáczaią przeyście pierwiáſtków w zrównaniu podanem z iednego rodzaiu do drugiego. Ale będąc ráz $m=m'$, po tem przeyściu te dwa pierwiáſtki ſtaią się rzetelne i nierówne; w tey nierówności może się przytrafić, że n. p. $m=m''$, albo że $m'=m''$, to ieſt, że ieden s tey páry pierwiáſtków ſtanie się równy trzeciemu, pod ten czás $4p^3+27q^2$, będzie zero, ale pierwiáſtki zrównaniá podanego nie będą dlá tego w momencie przeyściá, że dwa z nich nie tey ſamey páry, i nie wyciągnione s tego ſamego zrównania,

ſtały

ſtały ſię równé. Należy więc podług tego tłómaczenia warunek $4p^3+27q^2=0$ odnoſić do dwóch przypadków, to ieſt, kiedy dwa pierwiáſtki téyże ſaméy páry i wypádłé z iednégo zrównania $2go$ ſtopnia ſtaną ſię równé, i na tén czás w zrównaniu $3go$ ſtopnia pokazuią moment przechodu pierwiáſtków z iednégo rodzaiu do drugiégo.

Powtóre: kiedy dwa takié pierwiáſtki ſtaną ſię równé, któré nie wypadły z zrównania $2go$ ſtopnia, i nie ſą téyże ſaméy páry; i na tén czás $4p^3+27q^2=0$ nie pokazuie przechodu pierwiáſtków z iednégo rodzaiu do drugiégo.

Stáwmy ſobié na koniec zrównanie podané $x^3+px+q=0$, którégo pierwiáſtki ſą pewnémi funkcyami p, q; przy niém wſzyſtkié inné zrównaniá (A), (B), (C), (E), (F): a położywſzy w tém oſtatniém $4p^3+27q^2=z$, odmieniémy ié na $4y(4y-3p)^2-z=0$, to zrównanie wyráżá nám wſzyſtkié ſtóſunki i związki, któré zachodzić mogą między wártościami iłości znanych p, q; i między odpowiadaiącémi im wypádkami na pierwiáſtki rzetelné lub uroioné zrównaniá podanégo; wiémy bowiem że pierwiáſtki rzetelné lub uroioné w zrównaniu podaném zawiſły od pewnych wártości i ſtóſunków p, q, któré wſzyſtkié rázem wyráżá zrównanie $4y(4y-3p)^2-z=0$. To albowiém zrównanie wyráżá związek między z, y; zrównanie (E) daie związek między y, a; zrównanie (C) między a, p, q; więc kombinuiąc ié s ſobą, wypadnie z (F) ogólny ſtóſunek między p, q, z. Aże z ieſt znamieniém pierwiáſtków rzetelnych lub uroionych podług znaku dodátnégo lub odiemnégo; więc (F) zamyká wſzyſtkié ſtóſunki i związki mię-

dzy ilościami znanémi w zrównaniu podaném, i między odpowiadaiącym im rodzaiém pierwiástków.

Teorya ta stósowana do zrównáń 4go stopnia odkryłaby nám zapewne wáżné iakié prawdy i uwági, ale że teń rachunek barzoby nás rosciągnął i odwiódł od tego, naczyméśmy stanęli: każdy z uwág nad 3cim stopniem poznać powinień ducha téy teoryi, oráz sposób obeyścia się z nią w iakimkolwiek stopniu wyższym. Zostawiémy to docieczenie prywatnému każdégo dochodzeniu, przystępuiąc iuż do nowégo rachunku który nám się w ciągu naszych bádáń pokazáł.

KONIEC PIERWSZEY CZĘSCI.

CZĘSC DRUGA

TŁOMACZĄCA NATURĘ I WŁASNOSCI *FUNKCYI PRZESTĘPNYCH*,

ORAZ

SPOSOBY ONYCH WYRAZANIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

Rozbieráią fię Funkcye na SZEREGI: wykładaią fię właſności SZEREGÓW ZWROTNYCH i ſpoſób wynaydowaniá OGÓLNEGO ich WYRAZU, s przyſtóſowaniém do zrównáń.

§. XXXII.

Porównanie funkcyi Algebraicznych z przeſtępnémi.

Odbyliśmy ſobie w Piérwſzéy Części to, co do zrównáń i odpowiadaiących im funkcyi náleży, idąc tak daleko w tych badaniach, iak daleko w nich rozum ludzki poſtąpił. Ale ponieważ zawſze z zrównáń dochodziliśmy nowych gatunków i właſności funkcyi, nie zaſtanáwialiśmy ſię tam, tylko nad takiémi funkcyami, w któré wprowadziwſzy związek mogliśmy s każdégo wártość iakiéykolwiek ilości, wyrazić przez inné w zrównaniu zawarté. I tak n. p. maiąc zrównanie $A+B+C+D=o$, gdzie A, B, C, D, znaczą ilości znané i nieznané zmięſzáné razém, mogliśmy z związku w tém zrównaniu zamkniętégo wyrazić iakąkolwiek ilość przez inné, nie potrzebuiąc do tego, tylko tych działáń któreśmy tam doſtrzegli w funkcyach, to ieſt: dodáwaniá, odciąganiá, mnożeniá, dzieleniá, wynoſzeniá do potęg, i wyciąganiá piérwiaſtków; do czego przydadź należy rozwiązanie zrównáń. Wſzyſtkié początki któreśmy w tych dociekaniach mięſzali, nie ſłużyły nám tylko za pomoc do wprowadzeniá tego lub owégo działánia w naſzé rachunki, tak dalece: że lubo przeſzkody té ſamé któré zatrzymały wſzyſtkich Geometrów, odięły nám ſpoſoby rozwiązaniá zrównáń ſtopni wyżſzych nad czwarty; iednakowóż nie mogły w nas oſłabić tego przekonania, że gdyby prawidła naſzé na trzeci i czwárty ſtopiéń były doſkonalſzé, przyſzlibyśmy do wynalezieniá piérwiaſtków wyżſzych ieſzcze ſtopni, i że w tém wynaydowaniu nie potrzebaby nám in-

nych działań prócz tych, które nám w ſtopniach niżſzych ſłużyły. Właſność bowiem ogólná zrównań pod §. 20. i ſamé przeſzkody na końcu piérwſzéy części wytknięté, dały nám oczywiście poznać wzaiemną záwiſłość niżſzych ſtopni od wyżſzych, i przeciwnie; a zatém oſtrzegły nás, że działania byłyby tego ſamégo rodzaiu, byleby dokładniéy mogły bydź przyſtóſowané. Ieżeli więc nie mogliśmy w zrównaniach 5go, 6go i dalſzych ſtopni wyrazić iakiéykolwiek ilości przez inné; przypiſać to powinniśmy niedokładnym prawidłom; nie mámy zaś prawa wnosić potrzeby nowych działań prócz tych, któréśmy wymiénili. A zatém zrównaniá iakichkolwiek ſtopni wyżſzych, iako i funkcye wielo-kſztáłtné, które im odpowiadaią, náleżą do tego ſamégo rodzaiu ilości, któréśmy dotąd uważali. Takowé zrównaniá nazywaią ſię *Algebraiczné*, dlá tego że wynalázek w nich dokładny i niewątpliwy iakiéykolwiek ilości, zawiſł od działań Algebraicznych w piérwſzéy części wyłożonych. Funkcye także mogącé ſię zamienić i ogarnąć w takowych zrównaniach, wzięły imie *Algebraicznych*. Ieżeli więc trafiémy na taki rodzáy funkcyi, które potrzebować będą innych cale działań, i na których traktowanie nawetby nám nayogólniéyſzé zrównań Algebraicznych prawidła nie mogły pomódz; umieſzczémy ié w innéy klaſsie zrównań i funkcyi, które nazwiémy PRZESTĘPNEMI (*Tranſcendentes*).

Działaniá przywiązané do pewnych kondycyi, iakiém było dzielenie, wyciąganie piérwiáſtków, przywiodły nás do wyrazu pewnych funkcyi przez paſmo terminów nigdy ſię nie maiących ſkończyć. Przypádek także nieprzywiedlny 3go ſtopnia wciągnął nás w podobny rodzáy rachunku. Gdyby wynalázek iakiéy rzeczy nieznánéy z natury ſwoiéy zawiſł od takiégo nieſkończonégo wyrazu, przyzná każdy, że na odkrycie takiéy rzeczy dokładné, wſzyſtkié prawidła náydoſkonalſzé Algebraicznych zrównań nie mogłyby nám wyſtarczyć ani pomóc. Zrównanie bowiem

tego

tego rodzaiu maiąc nieskończoną liczbę piérwiástków, nie mogłoby bydź rozwiązané sposobém przywiązanym do iakiéykolwiek, ale zawsze skończonéy piérwiástków liczby, iaką zrównaniá Algebraiczné wyrażać zwykły: a gdybyśmy nawet potrafili wártość iednéy ilości przez szereg nieskończony wyrazić n. p. $z=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ i t. d. oprócz tego, żeby tén wyráz nie mógł nám nigdy odkryć wártości zupełnéy z, má iesżcze i tę niedoskonałość, że chcąc x wyrazić przez z i inné ilości w zrównanie wchodzącé, nie moglibyśmy nigdy przyiśdź do tego przez sposoby zrównaniom Algebraicznym właściwé, a zatém nie potrafilibyśmy z związku podanégo wyciągnąć zupełnie wártości iednéy iakiéykolwiek ilości przez inne. Ale możémyż s tégo wnieść, że funkcye nierozdzielné zupełnie, funkcyé piérwiástkowe, i zrównaniá 3go stopnia nie są funkcyami Algebraicznémi? Bynáymniéy: funkcye bowiém nierozdzielné máią swóy wyráz ułomkowy skończony, który zamiéniony lub wciągniony w zrównanie kładzie nás w stánie wynalezieniá iakiéykolwiek ilości zupełnie, za pomocą działań Algebraicznych; i nie zamieniá się na szereg nieskończony, tylko kiedy ią chcémy wyrazić przez różné potęgi ilości nieznanéy wchodzącéy w mianownika. Takowy wyráz ciągnąc się bez końca daie nám poznać, że funkcyá nie maiącá potrzebnéy kondycyi do zupełnéy podzielności, może przéyiśdź przez wszystkié potęgi ilości nieznanéy, i przez wszystkié terminy postępu Geometrycznégo, zostaiąc zawszé niepodzielną: i że wszystkié Algebraiczné działaniá wyczérpáwszy, nie potrafiémy iéy natury odmienić. Funkcye także piérwiástkowé niewymiérné rozbiéraiąc się na szeregi nieskończoné, nie przestaią bydź Algebraicznémi; bo maią swóy wyráz piérwiástkowy skończony, przy którym zamiéniwszy ié na zrównanie, możémy w nich ilość iakąkolwiek wyrazić przez inné sposobém zupełnym, oswobodziwszy ié wprzód od znaku piérwiastkowégo podług

§. 25. Ich wyráz nieſkończony pokazuie tylko tó, co w funkcyach niepodziélnych, to ieſt: że będąc z nátury ſwéy niezupełnémi potęgami, nie potrafiémy ich przez wſzyſtkié gatunki działáń algebraicznych na potęgi zupełné przerobić. Zrównaniá nakoniec 3go ſtopnia przyprowadziły nás do ſzeregu nieſkończonégo przez niedoſkonałość prawideł do tego użytych. Nie można bowiem tego dowieśdź, że zrównanie 3go ſtopnia przez naturę ſwoię nie może wydádź piérwiáſtków w wyrazie ſkończonym, kiedy té ſą wſzyſtkié rzetelné; widzieliśmy bowiem przypádki ſzczególné, które wyſtawiaiąc nám piérwiáſtki pod wyrazém uroionym i niewymiérnym, dały ſię przecię przywieśdź do wyrazu rzetelnégo i ſkończonégo.

Wyciągaią ſię zadaniá zachodzić mogącé w teoryi ſzeregów, które nás zatrudniáć maią.

Kiedy zaś po użyciu wſzyſtkich nám dotąd zoſtawionych ſpoſobów nie możémy przyiśdź do piérwiáſtków ſkończonych zrównaniá, przeſtać na tén czás muſzémy na piérwiáſtkach bliſkich prawdy wyciągnionych s piérwſzych terminów ſzeregu, które ſtarać ſię winniśmy iak naybarziéy uczynić maleiącémi, aby to, co opuſzczámy, małością ſwoią nie rodziło znacznéy odmiany w wypádkach rachunku. Chcąc zaś ſądzić o wártości opuſzczonych terminów, potrzeba wiedzieć zachodzącé w ich ciągu prawo przywiązané do gatunku i wzoru funkcyi; przy którém maiąc wiadomą wártość ilości w terminy wchodzących, poznámy łatwo ſtopnie ich wzroſtu lub ubywaniá. Te ieſzcze doſtrzeżoné prawa naſtępſtwa ſłużą nám do wynalezieniá funkcyi ſkończonéy, która ſię na taki ſzereg rozbiérá, kiedy ta ieſt nieznaná. Nim nám ſię té myśli w więkſzém pokażą świetle powinny nám teráz dadź uczuć, że puściwſzy mimo ſiebie innégo rodzaiu funkcye, których ieſzcze nie známy, ſamé funkcye Algebraiczné wyciągaią po nás dokładnégo poznaniá ſzeregów nieſkończonych. W tém poznaniu zachodzą trzy zadániá do których rozwiązaniá cała naſzá zmiérzać

będzie

będzie uwága; to iest: maiąc funkcyą iakąkolwiek Algebraiczną mogącą się rozebrać na szereg nieskończony, wynaleśdź sposób łatwy i ogólny na tén rozbiór: *powtóre*: maiąc funkcyą rozebraną na szereg nieskończony, wynaleśdź prawo, podług którégo układaią się terminy bez końca się ciągnącé: *potrzecié*. Maiąc szereg nieskończony i prawo iego postępu, odkryć funkcyą, która tén szereg s siebie wydała. Zatrudniymy się rozwiązaniém tych zadań, które składać będą całą teoryą szeregów nieskończonych, abyśmy się nauczyli w wszelkich przypadkach obchodzić nie tylko s funkcyami Algebraicznémi, ale nawet i s funkcyami innégo rodzaiu ieżeli nám się pokáżą, i ieżeli ich wyráz zawiśnie od szeregów.

Ponieważ zaś w teraźnieyszych badaniach wynieśliśmy się iuż do rozległéyszéy ogólności, uważaiąc funkcye niezawisłe od żadnégo pytania szczególnégo, muszémy upowszechnić nazwisko i podział ilości w funkcye wchodzących, abyśmy się zbliżali co ráz barziéy do ięzyka wyższych matematycznych nauk. W piérwszéy Części dzieliliśmy ilości na znané i nieznané, dlá tego, że w teoryi zrównáń szło nám zawsze o wynalezienie piérwiástków, czyli wyrażenie ilości niewiadoméy przez wiadomé; do zrównáń stósuiąc funkcye, zachowaliśmy w nich to samo nazwisko. Ze zaś uważać nám przyidzie funkcye przez się, nie maiąc względu na wártość ilości nieznanéy, dzielić ieszcze będziémy ilości na ODMIENNE (*variabiles*) i STATECZNE (*constantes*). Przez piérwszé rozumieć będziémy ilości odmieniaiącé swoię wártość iakimkolwiek sposobém, to iest sposobné do przyięcia wszystkich iakié się tylko wymyślić mogą wártości; przez drugie będziémy rozumieć ilości dochowuiacé w całym ciagu rachunku ráz nadanéy wártości. Ilości odmienné znaczyć będziémy przez ostatnié litery alfabetu x, y, z, i t. d. tak iakésmy znaczyli ilości niewiadomé; ilości zaś stateczné tak, iak ilości wiadomé przez litery alfabetu piérwszé a, b, c,

 i t.d.

i t. d. Zacznijmy od pierwszego zadania które rosciągniemy do funkcyi ułomkowych i pierwiástkowych.

Spoſoby rozbierania funkcyi ułomkowych na ſzeregi.

Wyſtáwmy ſobie funkcyą ułomkową: $\frac{M.}{N}$ - - - $\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ - - - kz^n}{p+qz+rz^2+sz^3 + p^{n+1}}$ przywiedzioną iuż za pomocą dzielenia do prawdziwego ułomku. Biorąc porządnie różne iey potęgi począwſzy od náyprościeyſzey $\frac{a}{p+qz}$ aż do náyzawikleyſzey, i te rozbieraiąc ciągłem dzieleniem, znaydziemy przez prawidła §. 3. że

$$\frac{a}{p+qz}=\frac{a}{p}-\frac{aq}{p^2}z+\frac{aq^2}{p^3}z^2-\frac{aq^3}{p^4}z^3+\frac{aq^4}{p^5}z^4 \text{— i t. d}$$

które podobnie ſtóſuiąc do $\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}$, $\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$, i t. d. przyidziemy do wyrazu nieſkończonego każdey w ſzczególności funkcyi. W tych ſzeregach pokaże nam ſię ten ſam ſtateczny ſtóſunek iednego terminu do drugiego po nim naſtępuiącego, iak n.p. w $\frac{a}{p+qz}$: ſtóſunek ten wypadá $\frac{qz}{p}$ między każdemi dwoma przyległemi terminami; czyniąc Postęp Geometryczny (*Progreſſio Geometrica*) układaiący ſię podług potęg ilości nieznaney z; co właśnie zgadzá ſię z naturą ułomku. Ale ieżeli te prawidła dzieleniá będziem chcieli rosciągnąć do funkcyi zawikleyſzych, mimo pracowite i rozwlekłe działaniá, ſtracemy barzo wiele na dochodzeniu nowych praw d, które s takiego rachunku mogą wypádać. Szukaymy więc rozległeyſzego ſpoſobu rozbierania iakichkolwiek funkcyi ułomkowych na ſzeregi. Wiedząc i s przykładów ſzczególnych i z natury ułomków że wſzyſtkie takowe ſzeregi poſtępuią podług porządnie wzraſtaiących potęg ilości nieznaney z, nie idzie nam tylko o wyna-

o wynalezienie ogólné wſpół-czynników każdégo terminu: nazwiymy té wſpół-czynniki A, B, C, D, E, i t. d. a funkcyá podaná rozbiérze ſię na ſzereg naſtępuiący. $\frac{a}{p+qz}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+$ i t. d. w nim tylé rzeczy mámy nieznanych do wynalezieniá, ilé ieſt terminów ſzeregu. Przywiédźmy naſámprzód to zrównanie do zero, znióſſzy ułomek, i ułożywſzy terminy podług porządku potęg z; wypadnie

$$o= pA+Bp.z+pC.z^2+pD.z^3+pE.z^4+ \text{ i t. d.}$$
$$-a+qA. \quad +qB. \quad +qC. \quad +qD.$$

Zrównanie to powſtáwſzy z zrózwiązaniá funkcyi, ieſt zrównaniém TOSAMEM *(Identica)*; nie może więc podług §. 10. wyrážać żádnégo związku między ilością znaną i nieznanémi, a zatém powinno miéć miéyſce niezawiśle od żádnéy ſzczególnéy wártości na z. Nie mogą więc w niém ani wſzyſtkié terminy razém, ani kilka ich na ráz bydź zero, ale tylko każdy z oſobna; inaczéy wprowadzilibyśmy związek między z, i ilościami znanémi, s którégo wypadłyby pewné wártości na z, i ułomek ſzereg rodzący przeſtáłby bydź funkcyą. Ieżeli zaś káżdy z oſobna termin bydź powinién zero, nie może bydź $z=o$, bo przez to nadałaby ſię wártość z. Przeto w każdym terminie wſpół-czynnik ilości nieznanéy z, bydź powinién zero, ſkąd powſtanie tylé zrównáń ilé terminów:

(α) $pA-a=o$, $pB+qA=o$, $pC+qB=o$, $pD+qC=o$, i t. d. Té wſzyſtkié zrównaniá ſłużą na oznaczenie wſpół-czynników nieznanych A, B, C, D, i t. d. wyciągniémy bowiem z nich

$$A=\frac{a}{p},\ B=-\frac{qA}{p}=-\frac{qa}{p^2};\ C=-\frac{qB}{p}=\frac{aq^2}{p^3}$$

i t. d. które włożywſzy w ſzereg na miéyſce A, B, C, i t. d. wypadnie: $\frac{a}{p+qz}$

$$\frac{a}{p+qz}=\frac{a}{p}-\frac{aq}{p^2}z+\frac{aq^2}{p^3}z^2-\frac{aq^3}{p^4}z^3+\text{ i t. d.}$$

Maiąc sobie podane funkcye do rozbieraniá zawikleysze n. p. $\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}$, $\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$, . . . $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{p+qz+rz^2+sz^3+tz^4}$ i t. d. i obchodząc się z niemi podług dopiero wyłożonego początku, będzie:

$\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+$ i t. d. czyli

$$\begin{array}{l} o=Ap+Bp.z+Cp.z^2+Dp.z^3+Ep.z^4+\text{ i t. d.}\\ \quad -a+Aq.\ +Bq.\ +Cq.\ +Dq.\ +\text{ i t. d.}\\ \qquad -b.\ +Ar.\ +Br.\ +Cr.\ +\text{ i t. d.}\end{array}$$

czyniąc każdego współ-czynnika równym zero, otrzymamy náprzod: $Ap-a=o$, $Bp+Aq-b=o$; powtóre:

$Cp+Bq+Ar=o$.
$Dp+Cq+Br=o$. (β). Podobie funkcyá $\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$
$Ep+Dq+Cr=o$.

rozebraná na podobny szereg, przywiedzie nás do zrównaniá:

$$\begin{array}{l} o=Ap+Bp.z+Cp.z^2+Dp.z^3+Ep.z^4+Fp.z^5+\text{ i t. d.}\\ \quad -a\ +Aq.\ +Bq.\ +Cq.\ +Dq.\ +Eq.\\ \qquad -b.\ +Ar.\ +Br.\ +Cr.\ +Dr.\\ \qquad\quad -c.\ +As.\ +Bs.\ +Cs.\end{array}$$

skąd náprzód na początkowe terminy przypadnie: $Ap-a=o$, $Bp+Aq-b=o$, $Cp+Bq+Ar-c=o$, potém

$$\begin{array}{l} Dp+Cq+Br+As=o\\ Ep+Dq+Cr+Bs=o \qquad (\gamma)\\ Fp+Eq+Dr+Cs=o\\ \text{i t. d.}\end{array}$$

Funkcyá jeszcze

$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{p+qz+rz^2+sz^3+tz^4}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+$ i t. d. czyli:

$o=Ap$

$o = Ap + Bp.z + Cp.z^2 + Dp.z^3 + Ep.z^4 + Fp.z^5 +$ i t. d.
$- a + Aq. + Bq. + Cq. + Dq. + Eq.$
$- b. + Ar. + Br. + Cr. + Dr.$
$- c. + As. + Bs. + Cs.$
$- d. + At. + Bt.$

s których otrzymamy naprzód $Ap - a = o$, $Bp + Aq - b = o$, $Cp + Bq + Ar - c = o$, $Dp + Cq + Br + As - d = o$: powtóre dalsze terminy dadzą

$$Ep + Dq + Cr + Bs + At = o$$
$$Fp + Eq + Dr + Cs + Bs = o \quad (\mathfrak{A})$$
$$Gp + Fq + Er + Ds + Ct = o$$
i t. d.

Zastanowiwszy teraz uwagę naszę nad temi funkcyami ułomkowemi i nad wypadkami im odpowiadającemi, znaydziem:

Naprzód. Ze pierwsze terminy każdego szeregu co do wartości swoiey zawisły od licznika ułomku, tak dalece: że liczba terminów w liczniku przez swoie współ-czynniki wpływa w wartość równey sobie liczby współ-czynników szeregu. Ieżeli n. p. licznik ułomku zawierać będzie trzy terminy; w szeregu tey funkcyi trzech terminów poczatkowych współ-czynniki, zawisną od trzech współ-czynników licznika. Własności szeregów zwrotnych.

Powtóre. Przeszedłszy liczbę terminów szeregowych równą liczbie terminów licznika, wszystkie współczynniki dalszych terminów zawisły od współ-czynników terminów poprzedzaiących, i od współ-czynników mianownika ułomku, tak dalece: że ieżeli mianownik ułomku zawiera dwa terminy; współczynnik terminu szeregowego zawisł od iednego współczynnika poprzedzaiacego, iako nás o tem przekonywaią zrównania (α). Ieżeli mianownik zawiera trzy terminy, współ-czynnik każdy terminu szeregowego zawisł od dwóch poprzedzaiących, iako pokazuią zrównania (β). Nakoniec ieżeli mianownik ułomku zawiera liczbę n terminów; współ-czynnik

terminu

terminu ſzeregowégo zawiſł od liczby $n-1$ poprzédzaiących. Ponieważ więc w ſzeregu s funkcyi ułomkowéy powſtaiącym, każdy wſpół-czynnik ieſt funkcyą kilku poprzédzaiących, ſzeregi takowé nazywaią ſię ZWROTNEMI (*Series Recurrentes*). dlá tego, że chcąc oznaczyć którégo z nich, wrácać ſię muſzémy do poprzédzaiących go.

Potrzecié. Terminy poprzédzaiącé przez które wyráżá ſię iakikolwiek wſpoł-czynnik ſzeregowy, ſą mnożoné przez wſpółczynniki mianownika ułomku; od wſpółczynników więc mianownika zawiſł cały ſtóſunek i związek terminów ſzeregowych co do ich wártości i liczby: i dlá tego té wſpół-czynniki nazywać odtąd będziémy z Angielſkim Geonietrą *Moivre*, STOPNIAMI STÓSUNKU (*Scala relationis*). Ieżeli mianownik ułomku ieſt $p+qz$, w ſzeregu s tąd powſtaiącym wſpół-czynnik Q terminu iákiégokolwiek oznaczá ſię przez zrównanie: $pQ+qP=o$; ieżeli $p+qz+rz^2$ ieſt mianownikiém ułomku, w iego ſzeregu wſpół-czynnik Q zawiſł od zrównaniá $pQ+qP+rO=o$. i t. d. gdzie litery p, q, r, i t. d. ſą tém, co my nazywámy ſtopniami ſtóſunku.

Poczwarté: Oznáczaiąc z zrównáń $(\alpha), (\beta), (\gamma)$; (δ), i t. d. wſpół-czynniki iakiégokolwiek s terminów ſzeregowych, przez poprzédzaiącé, przypadá wſzyſtkié dzielić przez p, czyli przez termin cáłki wiádomy mianownika ułomku; więc w przypádku kiedy ta ilość byłaby zero, wſzyſtkié terminy ſtana ſię nieſkończoné, i pokazuią nieprzyzwoitość zaſzłą w rachunku. Zatrzymáymy ſię teráz nád ſpoſobém rozbiéraniá takowych funkcyi.

§. XXXIII.

Rozwięzuią ſię ſzczególné przypádki w ułomkach rodzących ſzeregi.

Mámy iuż iedén początek którégo ſtatecznié używámy w ułatwiéniu trudności wypádaiących s pewnych ſzczególnych przypádków wybáczaiących od teoryi ogólnych. Tén początek záleży na tém, ażeby roſtrząſnąć náprzód dla czégo przypádék naſz

nie

nie zgádzá się z ogólnémi prawidłami: powtóre, przywieśdź go do takiego wyrazu, na iaki służyły té ogólné prawidła. Tu n.p. wypadła nám nieprzyzwoitość zniszczywszy termin całki wiadomy, który wchodził w mianownika, całá więc przyczyna téy nieprzyzwoitości wyniká z różnicy między wzorém pierwszych przykładów $\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{p+qz+rz^2+sz^3+\text{ i t.d.}}$ i przykładów teraźniéyszych, któré się wyrážaią przez $\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{qz+rz^2+sz^3+\text{ i t. d.}}$, ale przywiódłszy tén ostatni do pierwszégo, wpadniémy znowu na takié przypádki którym służyły prawidła iuż użyté. I tak rozebrawszy mianownika ostatniégo wzoru na dwa mnożniki $z(q+rz+sz^2+\text{ i t.d.})$, złóżmy pierwszy ułomek $\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{q+rz+sz^2+tz^3+\text{ i t.d.}}$, który rozbierze się na szereg nieskończony, przez té samé prawidła, któré nám służyły wyżey: ten szereg potém rozdzieliwszy przéz z, wypadnie wártość ułomku podanégo, to iest;
$$\frac{a+bz+\text{ i t. d.}}{z(q+rz+sz^2+\text{i t.d.})}=\frac{A}{z}+B+Cz+Dz^2+Ez^3+Fz^4+$$
i t. d. Chcąc ieszcze wystawić przypádek teražniéyszy pod ogólniéyszym wzorém, uważáymy funkcyą
$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{qz^m+rz^{m+1}+sz^{m+2}+\text{ i t. d.}}=\frac{a+bz+\text{ i t. d.}}{z^m(q+rz+sz^2+\text{ i t. d.})}$$
a szereg s tego ostatniégo wyrazu podług dopiéro wyłożonégo działániá wypadnie: $\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+$
$\frac{C}{z^{m-2}}+\frac{D}{z^{m-3}}+\text{i t d.}=\frac{a+bz+\text{ i t. d.}}{z^m(q+rz+sz^2+\text{ i t.d.})}$ przywiódłszy takowé zrównanie do zero, każdy współczynnik będzie zero, i na z nie przypadnie żadná wartość, podług práwd gruntowych, na których zasadziliśmy rozbiór funkcyi ułomkowych na szeregi.

Zebyśmy

Zebyśmy nic nie opuścili cokolwiek do zupełnoścî téy teoryi należy, potrzebá nám przéyśdź przez wſzyſtkié wyrazy funkcyi ułomkowych; tych róźnica wiémy że wypádá z róźności mianownika; który iako wyráźá naturę ułomku, tak razém ciągnie za ſobą prawo ſtóſunku między iakimkolwiek terminém i poprzédzaiącémi go. Wyſtáwmy ſobie więc funkcyé ułomkówé pod wſzelką iaka ſię tylko wymyślić może poſtacią; tych ſzukać nám potrzeba w róźnych wyrazach mianownika. Wiémy s piérwſzéy Części że funkcyi natura wypádá z natury mnoźników, tak iako natura zrównania powſtaie z natury piérwiáſtków. Té mnoźniki mogą bydź równé lub nierówné, rzetelné lub uroioné. Nie przypádá nám tu ieſzcze użycie tego oſtatniégo podziału, dlá tego, że funkcyę uwáźámy w całym ſwoim ſkładzie, wyraźaiąc ié przez ſzeregi. Ale piérwſzy podział należy iſtotnie do teraźniéyſzégo zamiaru. Biorąc za mianownika funkcyą $p+qz+rz^2+$ i t. d. uwáźaliśmy go pod ogólnym barzo wyrazém, a zatém iako złożonégo z mnoźników nierównych iakichkolwiek: uſzczególniymy teráz náſzé myśli, i wyſtáwmy ſobie mianownika z mnoźnikami równémi, a tym ſpoſobém wypadną nám róźné potęgi w ułomku; to ieſt: $\frac{a+bz}{(1-pz)^2}$, $\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3}$, i ogólniéy $\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ \text{ i t. d.}}{(1-pz-qz^2+ \text{ i t. d.})^m}$; $\frac{a+bz+ \text{ i t. d.}}{(1-pz)^m}$.

Piérwſzy ułomek rozebráwſzy na ſzereg, otrzymámy:

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+ \text{ i t. d. czyli}$$

$$\begin{array}{lllllll}
0=A & +B.z & +C.z^2 & +D.z^3 & +E.z^4 & +F.z^5+ & \text{i t.d.} \\
-a & -2pA. & -2pB. & -2pC. & -2pD. & -2pE. & +\text{ i t.d.} \\
 & -b. & +p^2A. & +p^2B. & +p^2C. & +p^2D. & +\text{i t.d.}
\end{array}$$

więc

więc $A-a=o$, $B-2pA-b=o$,
$C-2pB+p^2A=o$, s których wypadá $A=a$, $B=2pa+b$,
$D-2pC+p^2B=o$, $C=3p^2a+2pb$, $D=4p^3a+3p^2b$;
$E-2pD+p^2C=o$, $E=5p^4a+4p^3b$.
i t. d. a przeto funkcyá podaná:

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2} = \begin{matrix} a + 2pa.z + 3p^2a.z^2 + 4p^3a.z^3 + 5p^4a.z^4 + \text{i t. d.} \\ + \; b. \; + \; 2pb. \; + \; 3p^2b. \; + \; 4p^3b. \; + \text{i t. d.} \end{matrix} \quad (\varepsilon).$$

Podaią ſię wyrazy ogólné na ſzeregi zwrotné.

W tym ſzeregu łatwo ieſt barzo widzieć układ ciągnących ſię terminów, i tén wyrazić przez wykładniká iłości nieznanéy z: wyraz takowy oznáczaiący wſpół-czynnika iakiégokolwiek terminu przez wykładnika z w tym terminie zachodzącégo, nazwiémy WYRAZEM OGÓLNYM SZEREGU (*Terminus generalis ſeriei*); tén bowiém wyráz przez ſtóſunek który nám pokazuie między wykładnikiém i wſpół-czynnikiém każdégo terminu, maluie nám prawo, za którém idzie ſzerég, i oznaczá wártość iakiégokolwiek terminu nie zawiśle od wſzyſtkich innych. Wyráz ogólny ſzeregu dopiéro uwáżanégo ieſt $[(n+1)p^na+np^{n-1}b]z^n$, s którégo za wártością wykładniká n, wypadnie cały mu odpowiadaiący termin ſzeregu. Idąc daléy w tém dociekaniu, znáydziémy ſzeregi na funkcye wyżſzych ſtopni:

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+ \text{ i t. d. czyli:}$$

$$\begin{matrix} o = A & + B.z & + C.z^2 & + D.z^3 & + E.z^4 & + F.z^5 + \text{i t.d.} \\ -a & -3pA. & -3pB. & -3pC. & -3pD. & -3pE. - \text{i t.d.} \\ & -b. & +3p^2A. & +3p^2B. & +3p^2C. & +3p^2D. + \text{i t.d.} \\ & & -c. & -p^3A. & -p^3B. & -p^3C. - \text{i t.d.} \end{matrix}$$

S kąd wypádaią zrównaniá: $A-a=o$, $B-3pA-b=o$,
$C-3pB+3p^2A-c=o$,
$D-3pC+3p^2B-p^3A=o$, $A=a$, $B=3pa+b$; $C=6p^2a+3pb+c$,
$E-3pD+3p^2C-p^3B=o$, $D=10p^3a+6p^2b+3pc$,
$F-3pE+3p^2D-p^3C=o$, $E=15p^4a+10p^3b+6p^2c$.

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3} = \begin{matrix} a + 3pa.z + 6p^2a.z^2 + 10p^3a.z^3 + 15p^4a.z^4 + \text{i t.d.} \\ + \; b. \; + \; 3pb. \; + \; 6p^2b. \; + \; 10p^3b. \; \text{i t. d.} \\ + \; c. \; + \; 3pc. \; + \; 6p^2c. \; \text{i t. d.} \end{matrix} \quad (\lambda)$$

chcąc daléy ciągnąć ten szereg przypatrzmy się z uwagą współ-czynnikom każdego terminu, a dostrzeżemy łatwo, że ich prawo zamknięte iest w tym wyrazie ogólnym $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}p^n a+\frac{n.(n+1)}{1.\ 2}p^{n-1}b+\frac{(n-1)n}{1.\ 2}p^{n-2}c\right]z^n$.

Rozbieraiąc ieszcze tym samym sposobém funkcyą $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-pz)^4}$, znaydziémy naprzód, że każdy termin szeregu s tąd powstaiącego wyrazi się przez cztery poprzedzaiące mnożone przez współ-czynniki czwartéy potęgi, gdzie oraz dostrzeżémy że iego termin ogólny iest:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3}p^n a+\frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-1}b+\frac{(n-1).n.(n+1)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-2}c+\frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}d\right]z^n.$$

Stawiwszy sobie teraz przed oczy wynalezione dotąd wyrazy ogólne na różne potęgi mianownika, łatwo nam s tąd będzie przez porównanie i podobieństwo przyiśdź do wyrazu ogólnego takiego ułomku, którego mianownik iest potęgi m; takowy bowiem wyraz wypada oczywiście:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots[n+(m-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots(m-1)}p^n a+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots[n+(m-2)]}{1.2.3.4.\cdots(m-1)}p^{n-1}b+\frac{(n-1)n.(n+1)\cdots[n+(m-3)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots(m-1)}p^{n-2}c+\cdots+\frac{[n-(m-1)][n-(m-2)]\cdots n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots(m-1)}p^{n-(m-1)}g\right]z^n.$$

gdzie n znaczy iakiégokolwiek wykładnika ilości odmiennéy z; m wykładnika potęgi w mianowniku; g ostatniego współ-czynnika w liczniku. Ná-

Należałoby nám tu rosciągnąć uwágę na funkcye ułomkowé zamykaiącé w mianowniku potęgi iákiékolwiek Wielo-wyrazów (*Polynomium*). Ale że tén rachunek byłby nadto dlá nás zawikłany odbywaiąc go sposobém który nám tu posłużył, zostawiémy go więc wyższym częściom Matematyki. Niżeli zaś przyidzie nám się zastanowić nad wypádkami teraźnieyszych dostrzeżeń, wróćmy się ieszcze do rostrząsaniá szeregów powstaiących z rozbioru funkcyi ułomkowych maiących różné potęgi w mianowniku. Przypatrzywszy się terminom szeregu (ε) i uczyniwszy w nich $p=1$, $z=1$. zamieni się tén szereg na

$a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+(5a+4b)+$ i t. d.

gdzie między dwoma każdémi przyległémi terminami, zachodzi ta sama stateczná różnica, a zatém tén szereg czyni to, co nazywaią Postępem Arytmetycznym (*Progressio Arithmetica*). Każdy termin w tym szeregu nie przestaie bydź funkcyą dwóch poprzedzáiących: wystawiwszy sobie bowiem tén szereg pod wyrazem: $A+B+C+D+E+$ i t. d. będzie $C=2B-A$, $D=2C-B$, $E=2D-C$, i t. d. a przeto każdy postęp Arytmetyczny iest szeregiem zwrotnym. Idąc do dalszych potęg, uczyńmy w zrównaniu (λ) $p=1$, $z=1$, a zamieni się na:

$a+(3a+b)+(6a+3b+c)+(10a+6b+3c)+(15a+10b+6c)+$ i t. d.

biorąc różnicę między każdémi dwoma przyległémi terminami, powstanie s tych różnic drugi szereg:

$(2a+b)+(3a+2b+c)+(4a+3b+2c)+(5a+4b+3c)+$ i t. d.

w którym dopiéro każdé dwa przyległé terminy od siebie odciągnioné, daią wszędzie iednę stateczną resztę $a+b+c$: co pokazuie postęp Algebraiczny *drugiégo porządku*, dlá tego, że w nim dopiéro drugié różnicé są stateczné: takim iest postępém szereg liczb 1, 8, 25, 52, 89, i t. d. którégo każdy termin iest funkcyą trzech poprzedzaiących, maiacych za stopnie stósunku współ-czynniki trzeciéy potęgi, tak dalece, że wyraziwszy taki szereg przez $A+B+C+D+$ i t. d.

będzie $D=3C-3B+A$, $E=3D-3C+B$, i t. d.

Ciągnąc tym samym sposobem nasz rachunek, funkcya: $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-pz)^4}$ przyprowadzi nás do szeregu, w którym położywszy $p=1$, $z=1$, trafiémy na postęp Algebraiczny *trzeciégo Porządku*, w którym trzecie dopiéro różnice będą stateczne: takim iest szereg liczb 1, 8, 27, 64, 125, 216, i t. d. gdzie każdy termin iest funkcyą czteréch poprzédzaiących, które maią za stopnie związku współ-czynniki potęgi czwartéy, tak dalece że wyraziwszy taki szereg przez $A+B+C+D+E+$ i t. d. znaydziemy $E=4D-6C+4B-A$, $F=4E-6D+4C-B$, i t. d. Ułomek nakoniec, którégo mianownik będzie potęgą m, przyprowadzi nás do postępu Algebraicznégo $m-1^{so}$ porządku, dla tego, że w nim dopiéro różnice $m-ite$ będą stateczne. Każdy takowégo szeregu termin iest funkcyą m poprzédzaiących, w których współ-czynniki potęgi m są stopniami związku: co nám pokazuie tę ogólną prawdę, że postępy Arytmetyczne i Algebraiczne iakiégokolwiek porządku są szeregami zwrotnémi. W uwágach ieszcze teraźnieyszych pokázało nám się, że s szeregów iakiégokolwiek porządku, przez różnice między dwomá przyległémi terminami rodzą się nowe szeregi, s których dopiéro przed-ostatni iest postępem Arytmetycznym wydaiącym różnice stateczne. Tu odkrywá nám się nowy sposób uważania szeregów zwrotnych, przez wzgląd na ich różnice wypadaiące z odciągania dwóch iakichkolwiek przyległych terminów. Ale ten sposób nie należy tu ieszcze do naszégo zamiaru.

Wróćmy się teráz do uwág które nám pozostały o wyrazach ogólnych, á które razém należą do rozwiązania drugiégo zadania o szeregách. Stáwmy sobie razém przed oczy wyrazy ogólne, któreśmy nie dáwno wynaleźli na funkcye ułomkowe maiące w mianowniku różne potęgi, a uczyniwszy w nich $t=0$,

$t=0$,

$e=o$, $d=o$, $g=o$, tak dalece, żeby licznik ułomku nie zamykał tylko ſamę ilość ſtateczną i wiadomą, którą wyrażémy przez A; wyciągniémy na

Funkcye: $\frac{A}{(1-pz)^2}$ - - - - $\frac{A}{(1-pz)^3}$ - - - -

Wyrazy ogólne: $(n+1)Ap^nz^n$ - - $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}Ap^nz^n$

Funkcya: $\frac{A}{(1-pz)^k}$

wyra: ogól: $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ -\ -\ -\ (n+k-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ -\ -\ -\ -\ (k-1)}Ap^nz^n$.

S tego powodu wróćmy ſię ieſzcze do ułomków których mianowniki ſkładaią ſię z mnożników nierównych, a któreśmy iuż uważali naſámprzód. Przypomniáwſzy ſobie ſzereg powſtaiący z ułomku $\frac{a}{p+qz}$ łatwo doſtrzeżémy, że iego wyráz ogólny ieſt: - - $\pm\frac{aq^n}{p^{n+1}}$, gdzie znak niżſzy należéć będzie do liczby n párzyſtéy; niżſzy zaś do liczby niepárzyſtéy: tén ieſzcze wyráz ogólny wyrážémy próściey przez - - - $\frac{a}{p}\frac{(-q)^n}{(p)^n}$, ieżeli więc funkcyą ułomkową $\frac{a}{p+qz}$ przywiedziémy do wzoru $\frac{A}{1-pz}$; będzie Ap^nz^n iéy wyrazém ogólnym. Rozbieraiac zaś funkcye, których mianownik należy do wzoru $p+qz+rz^2+sz^3+$ i t. d. zobaczémy tak zawikłane kombinacye między wſpółczynnikami terminów, iż z nich ani ſobie obiecywać można ſpoſobu na znalezienie wyrazu ogólnégo; tén bowiem zależy na pewnym ſtóſunku między wſpółczynnikami iakiégokolwiek terminu, i wykładnikiem ilości odmiennéy w tymże terminie: wſpółczynniki zaś będąc funkcyami p, q, r, s, i t. d. nie

mogą bydź przez liczbę n w swych kombinacyach wyrażone. Bo gdyby nawet ilościom p, q, r, s, i t. d. naznaczone były pewne liczebne wártości, potrzebaby bydź w stanie wyciągnienia wszystkich zachodzących kombinacyi tych liczb z iedney liczby n, co iest niezmiernie trudno i przez náturę liczb, i przez ograniczoną barzo naszę wiadomość w ich teoryi. Zostaie nám w tey trudności chwycić się zostawionego naszym dociekaniom sposobu, to iest przywieśdź iakąkolwiek funkcyą maiącą mianownika złożonego z mnożników nierównych, do wyrazu $\frac{A}{1-pz}$ albo do $\frac{A}{p-qz}$; to iest: potrzebaby mianownika rozebrać na swe mnożniki proste, i z tych złożyc tyle ułomków wzoru $\frac{A}{p-qz}$ ile takowych znayduie się mnożników, tak, żeby summa ułomków prostych była równą ułomkowi podanemu. Wynalászszy potem wzory ogólne na każdy z tych prostych ułomków, będzie summa tych wzorów ogólnych równą wyrazowi ogólnemu ułomku podanego. Zatrudniymy się teraz tym wynalázkiem.

§. XXXIV.

Wyrażaią się ułomki składane przez ułomki proste.

Funkcyá práwdziwie ułomkowá wyrażá się náyogólniey: $\frac{M}{N} = \frac{a+bz+cz^2+dz^3 - - - +gz^n}{p+qz+rz^2+sz^3 - - +kz^{n+1}}$: gdzie potęga náywyższá w liczniku, iest koniecznie mnieysza od potęgi náywyższey miánownika. Zeby rozbieraiąc tę funkcyą na ułomki proste $\frac{A}{a'-b'z}$ zostawić ią przy całey swey ogólności; potrzeba koniecznie, aby takowe ułomki proste dodane do siebie były ze wszystkim równe ułomkowi podanemu, i nie wprowadziły żadnego warunku, któryby mógł iego ścieśnić ogólność; potrzeba więc aby funkcye ułom-

kowe

kowé proſté, były i co do wyrazu i co do liczby takie, iżby przywiodłſzy ié do zero, s wpół-czynników ilości odmiennéy tylé tylko wypadło zrównań, ilé ilości nieznanych. To zaś wſzyſtko zachowamy rozbieraiąc funkcyą $\frac{M}{N}$. na tylé ułomków proſtych: — $\frac{A}{a'-b'z}+\frac{B}{c'-d'z}+\frac{C}{f'-g'z}+$ i t. d. ilé ieſt mnożników proſtych nierównych w mianowniku N; gdzie nám potrzeba pamiętać, że ponieważ té ułomki proſté bydź powinny koniecznie ułomkami prâwdziwémi, w których potęga ilości odmiennéy w liczniku, bydź powinna niżſzą od potęgi mianownika; liczniki A, B, C, D, i t. d. muſzą bydź koniecznie ilościami całkiem ſtatecznémi. Mowiłem że na tylé ułomków proſtych wſpomnionęgo wyrazu rozbiéra ſię funkcyá, ilé mianownik N ma w ſobie mnożników proſtych *nierównych*. Maiąc bówiem mnożniki *równe* wzoru $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$ dlá ocaleniá wyżéy iuż przytoczonych przyczyn i zachowaniá funkcyi w tym rozbiorze przy całéy ogólności, ułomek $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$ rozbiérá ſię znowu na ułomki $\frac{A}{(a'-b'z)^m}+\frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}}+\frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}}+\cdots+\frac{K}{a'-b'z}$, których tylé bydź powinno, ilé m zamyká w ſobie iedności; té bowiem ułomki dodané razém i przywiedzioné do iednégo mianownika, wprowádzą do licznika potęgę $m-1$, którá zamyká m terminow; wypadnie więc przywiódłſzy ie do zero, tylé zrównań, ilé ilości nieznanych A, B, C, D, i t. d. i ogólność funkcyi nie będąc ścieśnioná żadném zbytniém zrównaniém, zoſtanie nienaruſzoną. S tego rozumowaniá wypadá, że chcąc

funkcyą ułomkową składaną rozbierać na funkcye cząstkowe których mianownik byłby drugiey potęgi n.p. $a'-b'z+c'z^2$, każdy ich licznik powinien mieć dwa terminy wzoru $A+Bz$, aby tyle wprowadzić ilości nieznanych, ile wyniknie terminów z przywiedzenia takowych ułomków do iednego mianownika, które potem tyleż wydadzą zrównań.

Nie opuścmy nic, cokolwiek pod uwagę o funkcyach ułomkowych może teraz podpadać. Uważaliśmy funkcye przez wzgląd na mnożniki równe i nierówne w mianowniku; uważaymy ie ieszcze przez wzgląd na mnożniki rzetelne lub uroione: ta bowiem uwaga iest istotna funkcyom, iak prędko ich mianowniki zaczęliśmy rozbierać. Iużeśmy się zupełnie odbyli co do mnożników rzetelnych, ale kiedy mianownik N będzie zamykał mnożniki uroione, iakże sobie postąpić? Wprowadziwszy który ułomek prosty uroiony w ten rozbiór, cała funkcya stanie się uroioną; przywodząc ie bowiem do iednego mianownika, wmieszaią się w liczniku terminy uroione, które się nie zniosą: będzie więc funkcya rzetelna równą funkcyi uroioney powstaiącey z dodania ułomków prostych: co iest wielką nieprzyzwoitością. Chcąc iey uniknąć, przymuszeni iesteśmy w tym razie wszystkie funkcye cząstkowe wprowadzić rzetelne, a zatem mianownika N iuż nie rozbierać na mnożniki *1go* stopnia uroione, ale na mnożniki *2go* stopnia rzetelne, które się rodzą z dwóch uroionych rozmnożonych przez siebie. Rozebraną więc takową funkcya na swe ułomki cząstkowe zamykać będzie między temi cząstkowemi ułomkami tyle dwoistych wzoru $\frac{A+Bz}{a'-b'z+c'z^2}$, ile par znayduie się mnożników uroionych w mianowniku N. Ale mianownik dwoisty $a'-b'z+c'z$ iest koniecznie taki, iż iego mnożniki proste są koniecznie uroione. Zebyśmy tę kondycyą mogli zawsze myśli uczynić przytomną, potrzebaby nam takiego wyrazu mianownika podwóynego, który-

ryby

ryby nosił na sobie cechę oznaczáiącą, że on powstał z dwóch mnożników prostych uroionych. Ponieważ wszystkié dotąd rostrząśnioné początki nie mogą nám poddać takiégo wyrazu, odłożyć musżémy do niższych uwág rozbiór takowych funkcyi: które nám podobnie trzeba będzie rozdzielić na równé i nierówné. Przéstaniemy więc teráz na uwádze tych tylko funkcyi ułomkowych wymiérnych, których miánownik N składá się z samych mnożników rzetelnych.

§. XXXV.

Spofóby rozbiéraniá ułomków składanych na proste.

Zeby ułomek iaki rozebrać na cząstkowé ułomki, s których się składá; potrzeba w tych cząstkowych ułomkach oznaczyć liczników i mianowników. Mianowniki té prosté wynayduią się przez rozbiór mianownika składanégo na swé mnożniki, który odbywá się sposobém użytym na rozwiązanie zrównań. Wiémy bowiem że to co iest piérwiastkiém w zrównaniu, iest mnożnikiém w funkcyi, więc wprowadziwszy związek w funkcyą składana $p+qz+rz^2+$ i t. d. przez uczynienie ią równą zero, otrzymámy zrównanie, które rozwiązáwszy znáydziémy iego piérwiástki; zniszczywszy potém związek w tych piérwiástkach przerobiémy ié na funkcye prosté, które będą mnożnikami funkcyi składanéy, a oraz mianownikami ułomków prostych. Ale iakże wynaleśdź liczników na takié prosté ułomki? Ponieważ w tém zadaniu nie idzie tylko o oznaczenie ilości nieznanych przez znané; piérwszy sposób, któryby nám się tu powinién stawić w myśli, iest początek pytań nieoznaczonych *Des-Carta* użyty w takim sposobie, iaki nám posłużył na początku tego rozdziału, kiedy nám trzeba było wynaydować współ-czynniki $A, B, C, D,$ i t. d. szeregu. Doświadczmy czyli nám się tu udá. Niech będzie do rozebraniá funkcyá podaná: - -

$\dfrac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$, będą iéy ułomki cząstkowé

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1-3z}+\frac{D}{1-5z}=\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$$

M5 chcąc

chcąc A, B, C, D, wyrazić przez liczby, potrzeba nám przywieśdź 1° członka ułomki do iednego mianownika, i przeniósszy potém licznika drugiéy strony; całé zrównanie do zero: s kąd wypadnie:

$$
\begin{aligned}
o = A &+ 9A.z + 23A.z^2 - 15A.z^3: \\
-1+B. &- 8B. + 15B. \\
+C. &- 6C. + 5C. \\
+D. &- 4D. + 3D. \\
-1. &- 3.
\end{aligned}
$$

czyniąc w tém zrównániu każdégo współ-czynnika równym zero, otrzymámy prawda tylé zrównań ilé nieznanych: ale że w każdém s tych zrównań znayduią się wszystkié nieznané, przez wyrzucanie ich działanie znacznie się zawikle. W teraźniéyszym ieszcze przypádku wyciągniémy przez eliminacyą $A=1$; $B=\frac{5}{8}$, $C=-\frac{90}{8}$, $D=-\frac{165}{8}$. Ale ieżeli funkcyá składać się będzie z więcéy takowych ułomków prostych, wynalázek liczników nieporównanie będzie pracowitszy. Sposób więc tén, który nám służył do rozbiérania funkcyi na szeregi, lubo i w teraźniéyszéy teoryi ma swoié użycie, przywiązany atoli iest do tych samych trudności, któré nám się pokázały w eliminacyi. Usiłuymyż przyiśdź do łatwiéyszégo:

Zacząwszy od funkcyi $\frac{M}{N}$, w których N składá się z mnożników nierównych, nazwiymy $N=(a'-b'z)S$, gdzie $a'-b'z$ znaczy iednego prostégo mnożniká; S zaś mnogość ze wszystkich innych, któré wchodzą w N; będzie więc $\frac{M}{N} = \frac{A}{a'-b'z} + \frac{R}{S}$, gdzie M, A, R, S, są koniecznie ilościami cálkiémi: uważaiąc té ułomki przywiedzioné do náyprościéyszégo ułomkowégo wyrazu. Ieżeli więc $\frac{M}{(a'-b'z)S} = \frac{A}{a'-b'z} + \frac{R}{S}$

będzie

będzie $R=\frac{M-AS}{a'-b'z}$, ponieważ R jeſt ilością całką, $M-AS$ musi bydź koniecznie rozdzielnem przez $a'-b'z$; więc uczyniwſzy $a'-b'z=o$, musi także bydź $M-AS=o$, s kąd wypádá $A=\frac{M}{S}$: wynáydziemy więc A włożywſzy w M, S, $z=\frac{a'}{b'}$ wyciągnione z zrównaniá $a'-b'z=o$. Tym zaś ſpoſobem, którym odkryliśmy A, wynáydziemy wſzyſtkie inne cząſtkowych ułomków liczniki. Weźmy n. p. funkcyą iuż dáwniey rozbieraną $\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$, gdzie $M=1+z+3z^2$, $S=(1-z)(1-3z)(1-5z)$ - - - $a'-b'z=z$, czyli $a'=o$, $b'=-1$; włożywſzy $z=o$ w M, S, będzie $\frac{M}{S}=1=A$. Chcąc wynaleśdź B, będzie $a'-b'z=1-z$, czyli $a'=1$, $b'=1$, $z=1$. - - $S=z(1-3z)(1-5z)$; $\frac{M}{S}=\frac{5}{8}=B$. Na C będzie - - $a'-b'z=1-3z$, $z=\frac{1}{3}$, $S=z(1-z)(1-5z)$, $M=\frac{5}{3}$ $S=-\frac{4}{27}$, $\frac{M}{S}=-\frac{9.5}{4}=-\frac{90}{8}=C$. Na wynalezienie D będzie $z=\frac{1}{5}$, $S=z(1-z)(1-3z)=\frac{8}{25.5}$: $M=\frac{33}{25}$, $\frac{M}{S}=\frac{165}{8}=D$. Przeto funkcyá - - -

$$\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}=\frac{1}{z}+\frac{5}{8(1-z)}-\frac{90}{8(1-3z)}$$

$+\frac{165}{8(1-5z)}$. Tym ſamym ſpoſobem poſtępuiąc ſobie z ułomkiem $\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1+z^2}{z(1+z)(1-z)}=\frac{M}{N}=\frac{A}{z}$

$+\frac{B}{1+z}+\frac{C}{1-z}$, i nadaiąc przyzwoité wártości S, które się za każdém działaniém odmieniá; znáydziémy $A=1$, $B=-1$, $C=1$, ułomki zaś proste na które się funkcyá rozbierá $\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}$.

Przystąpmy teráz do rozbioru funkcyi na ułomki cząstkowé, kiedy N zamyká w sobie mnożniki równé. Dowiedliśmy iuż, że na tén czás $\frac{M}{N}$ rozebrać się może na tylé ułomków cząstkowych, ilé wykładnik N zamyká w sobie iedności, to iest: że - - -

$$\frac{M}{(a'-b'z)^m S}=\frac{A}{(a'-b'z)^m}+\frac{B}{(a'-bz)^{m-1}}+ - - \frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}}+\frac{D}{(a'-b'z)^{m-3}} - - +\frac{K}{a'-b'z}+\frac{R}{S},$$

gdzie A, B, C, M, K, R, S, są ilościami cáłkiémi; S zaś znaczy innych mnożników nierównych wchodzących w N. Przywiózszy té ułomki prosté do iednégo mianownika, i rozmnożoné przez S przeniósszy na iednę stronę zrównaniá, otrzymámy:

$$\frac{M-S(A+B(a'-b'z)+C(a'-bz)^2+ - - K(a'-b'z)^{m-1})}{(a'-b'z)^m}$$

$=R$. Aże R iest ilością cáłką, więc żeby zrównanie to mogło mieć miéysce, licznik piérwszégo członka, musi bydź koniecznie zupełnie rozdzielnym przez mianownika, a zatém $a'-b'z$ iest koniecznie mnożnikiém całégo licznika; uczyniwszy więc $a'-b'z=0$, cały licznik stanie się zero: aże terminy wszystkié począwszy od B są mnożoné przez $a'-b'z$, więc té stawszy się zaráz zero, odpadną, zostawiwszy $M-AS=0$; s kąd $A=\frac{M}{S}$: gdzie nám trzeba pamiętać, iż nie wprzód $A=\frac{M}{S}$, póki w M, S, nie włożémy za z

wártości

wártości wyciągnioney z zrównaniá $a'-b'z=o$, czyli $z=\frac{a'}{b'}$. Ale iakże odkryiemy A, B, C, D, i t. d? Nie zgubmy się tylko w naszém rozumowaniu, a łatwo tego dokażemy.

Ponieważ $M-AS$ iest zupełnie rozdzielném przez $a'-b'z$; wykonáymy dzielenie, i wieloráz stąd otrzymány nazwiymy T, będzie $\frac{M-AS}{a'-b'z}=T$: kiedy zaś rozdzielémy cały ułomek przez $a'-b'z$, mianownik zmnieyszy się o ieden stopień, i zrównanie pozostałé będzie:

$$\frac{T-S(B+C(a'-b'z)+D(a'-b'z^2)^2 - - K(a'-b'z)^{m-2})}{(a'-b'z)^{m-1}}=R.$$

Teráz znowu R iest ilością cáłką, więc znowu ułomek cały pierwszego członka musi bydź rozdzielnym przez $a'-b'z$, położywszy więc $a'-b'z=o$, cały licznik będzie zero, ale niektóre w nim terminy rozmnożone przez $a'-b'z$, zaráz odpadną, zostawiwszy $T-SB=o$, s kąd $B=\frac{T}{S}$, co nám dá wártość na B, włożywszy w T, S, $z=\frac{a'}{b'}$. Ponieważ $T-SB$ iest zupełnie rozdzielném przez $a'-b'z$; wykonáymy to dzielenie, i wieloráz stąd wypádaiący nazwiymy U, $U=\frac{T-SB}{a'-b'z}$, takim sposobém cały pierwszy członek zrównaniá rozdzieli się znowu przez $a'-b'z$, i zostanie

$$\frac{U-S[C+D(a'-b'z) - - +K(a'-b'z)^{m-3}]}{(a'-b'z)^{m-2}}=R.$$

gdzie znowu R będąc ilością cáłką uczyni pierwszy członek zupełnie rozdzielnym przez $a'-b'z$, a zatém $a'-b'z=o$, zostawi $U-SC=o$, s kąd $C=\frac{U}{S}$: ta-

kim

kim sposobem ciągnąc nasze rozumowanie przyidziemy do wynalezienia wszystkich liczników ułomków cząstkowych. W całem tem działaniu widzemy, że S zostaie zawsze przy tey samey wartości, a samo tylko M odmienia się przez dzielenie, które za każdym wynalazkiem iesteśmy obowiązani wykonywać. Prawidła te wszystkie iaśniey się ieszcze wydadzą w przykładach.

Niech będzie $\frac{M}{N} = \frac{1+z^2}{(1-2z)^3(1+z)} = \frac{A}{(1-2z)^3} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{1-2z} + \frac{D}{1+z}$, gdzie $M=1+z^2$, - - $S=1+z$, $1-2z=0$, $z=\frac{1}{2}$, $A=\frac{M}{S}=\frac{5}{6}$, $\frac{M-AS}{1-2z} = \frac{1-5z+6z^2}{6(1-2z)} = \frac{1-3z}{6} = T$, $B=\frac{T}{S}=-\frac{1}{18}$; $\frac{T-BS}{1-2z} = \frac{4}{18} = U$, a zatem $C=\frac{U}{S}=\frac{4}{27}$. Nakoniec $D=\frac{M}{S}$, gdzie $M=1+z^2$, $S=(1-2z)^3$, $1+z=0$, $z=-1$, a przeto $D=\frac{2}{27}$; funkcya więc podana rozbiera się na te ułomki cząstkowe:

$$\frac{5}{6(1-2z)^3} - \frac{1}{18(1-2z)^2} + \frac{4}{27(1-2z)} + \frac{2}{27(1+z)}.$$

Tym samym sposobem postępuiąc sobie w innych przykładach, przyidziemy do cząstkowych ułomków iakieykolwiek funkcyi składaney maiącey w mianowniku mnożniki rzetelne, rowne lub nierówne. Teoryą tę tak dokładną i tak prostą rozbierania ułomków składanych na proste winniśmy W. Geometrze *Janowi Bernoullemu.*

§. XXXVI.

Przypomniymy sobie teraz co nas wciągło w potrzebę rozbierania ułomków składanych na ułomki proste. Bawiąc się nad własnościami szeregów zwrotnych

tnych, potrzeba nám było wynaleśdź każdego w ſzczególności *wyráz ogólny*; tén łatwo nám ſię pokázał w funkcyach ułomkowych proſtych wzoru $\frac{A}{1-pz}$, $\frac{A}{(1-pz)^n}$: ale chcąc naſzę uwágę rosciągnąć do ułomków zawikłéyſzych, pokázało ſię że wynalázek ich wyrazu ogólnégo ledwo ieſt podobny: potrzeba nám więc było ułomki zawikłané przerobić na proſté; s tych każdy przywiódłſzy do wzoru $\frac{A}{1-pz}$ będzie iego wyráz ogólny Ap^nz^n: a iako zbiór takowych proſtych ułomków równá ſię ułomkowi podanému, tak zbiór wyrazów ogólnych na ułomki cząſtkowé równy będzie wyrazowi ogólnému funkcyi podanéy. Niech będzie funkcyá podáná $\frac{M}{N}$, któréy ułomki cząſtkowé ſą $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}$ i t. d. będzie $(Ap^n+Bq^n+Cr^n+$ i t. d.$)z^n$ wyrazém ogólnym funkcyi $\frac{M}{N}$. Gdyby dwa z mnożników mianownika N, były ſobie równe, to ieſt $p=q$, mielibyśmy $\frac{A}{(1-pz)^2}+\frac{B}{1-pz}$ i piérwſzégo ułomku wyráz ogólny ieſt $(n+1)Ap^nz^n$; drugiégo Bp^nz^n, kładąc za $A+B$, B; będzie wyráz ogólny ułomku $\frac{M}{N}$, $[(nA+B)p^n+Cr^n]z^n$. i t. d. Ieżeli w N trzy mnożniki ſą równe, to ieſt $p=q=r$, iego wyráz ogólny będzie $\frac{(n+1)(n+2)}{2}Ap^nz^n$; ale ieżeli oprócz tych trzech równych znáyduie ſię ieſzcze który nierówny, rozbiór na tén

Przyſtoſowanie poprzédzaiącéy teoryi do wynáydowaniá wyrazów ogólnych

na tén czás ułomku $\frac{M}{N}$ na ułomki proste staie się potrzebny; tén rozbiór, nie może nás przyprowadzić tylko albo do wzoru $\frac{A}{1-pz}$ albo do $\frac{A}{(1-pz)^n}$; każdégo z osobna znaiąc wyráz ogólny, znáydziémy wyráz ogólny saméy funkcyi składanéy $\frac{M}{N}$. Zobáczmy to w przykładach:

I. Niech będzie szereg $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+$ i t. d. powstaiący s funkcyi ułomkowéy - - $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$, iakiż iego wyráz ogólny?

Wynáydziémy náprzód mnożniki mianownika uczyniwszy $1-z-z^2=0$, co nám dá $z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i $z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, zgubiwszy związek; té dwa mnożniki chcąc ie przywieśdź do wzoru $1-pz$, mnożę piérwszégo przez $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, i odmieniwszy znaki wypadnie $1-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}z$: drugiégo rozmnożywszy przez - - $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, otrzymámy $1-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}z$, które maią wzór $1-pz$: będzie więc $\frac{1+2z}{1-z-z^2}=\frac{A}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z}+$ $\frac{B}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z}$, szukaiąc liczników podług dopiéro wyłożonych prawideł znáydziémy $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, - - -

B=

$B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, przeto wyráz ogólny $(Ap^n+Bq^n)z^n$ w teraźnieyſzym przykładzie położywſzy $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, będzie: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n$

II. Wynaleśdź wyráz ogólny ſzeregu $1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+$ i t. d. wypádaiącégo z ułomku $\frac{1}{1-z-z^2+z^3} = \frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$, ułomek tén rozbiéra ſię podług ſpoſobu podanégo na té proſté: $\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1-z} + \frac{\frac{1}{4}}{1+z}$; piérwſzégo wyráz ogólny ieſt $\frac{n+1}{2}z^n$, drugiégo $\frac{1}{4}z^n$, trzeciégo $\frac{1}{4}(-1)^n z^n$, a więc wyráz ogólny ſzeregu podanégo ieſt: $\frac{2n+3\pm1}{2}z^n$, znak wyżſzy náleży w nim do liczby n párzyſtéy, niżſzy zaś do niepárzyſtéy.

Tłómaczy ſię związek między licznikami ułomków proſtych i terminami ſzeregu.

Zbiérzmy teráz na uwágę té prawdy, któréśmy o wyrazach ogólnych doſtrzegli. Każdy ułomek próſty wzoru $\frac{A}{1-pz}$, przyprowadził nás do wyrazu ogólnégo Ap^nz^n, którysmy oznaczyli przez licznika ułomku A, i przez wſpół-czynnika nieznanéy z; poniewáż wyráz ogólny zamyka w ſobie każdy termin ſzeregu wypádaiący za nadaniem wártości n, zamyká razém związek zachodzący między terminami ſzeregu i między licznikami ułomków proſtych A, B, C, i t. d. s tego więc związku można wyciągnąć wártość liczników przez wſpół-czynniki ſzeregowé równaiąc termin ſzeregu, z wypádaiącym tego ſamégo porządku terminém z wyrazu ogólnégo. Żeby ſię nie mylić w znaczeniu, wyrážać odtąd będziémy przez A, B, C, D, i t. d. liczniki ułomków proſtych przez któ-

 ré dany

re dany bywá wyraz ogólny; przez $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, i t. d. znaczyć będziémy wfpół-czynniki fzeregu powftaiącego z iakiégokolwiek ułomku. Niech więc
$$\overline{A}+\overline{B}z+\overline{C}z^2+\overline{D}z^3+\overline{E}z^4+ \ldots \overline{P}z^n+\overline{Q}z^{n+1}+\overline{R}z^{n+2} \ldots + \overline{X}z^{2n}+\overline{Y}z^{2n+1}\overline{Z}z^{2n+2} \text{ i t. d.} \quad (\psi)$$
znaczy fzereg powftaiący z rozbierania iakiéykolwiek funkcyi ułomkowéy. Ieżeli ta funkcyá była profta $\frac{A}{1-pz}$, piérwfzy iéy termin wyciągniémy z wyrazu ogólnégo Ap^nz^n uczyniwfzy $n=0$, s kąd wypadnie $\overline{A}=A$ to ieft; że piérwfzy takowy termin ieft zawfze równy licznikowi ułomku. Ieżeli ta funkcyá rozbiera fię na dwa ułomki profté $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}$, iéy wyráz ogólny ieft $(Ap^n+Bq^n)z^n$, zachodzą nám w tym przypádku dwa liczniki A, B, do oznaczeniá, na co potrzeba dwóch zrównáń; wyciągniémy té dwa zrównaniá z wyrazu ogólnégo za nadaniém dwóch różnych wártości n, a zatém licznik każdy oznaczáć fię będzie przez dwa wfpół-czynniki początkowych terminów fzeregu; to ieft uczyniwfzy w wyrazie ogólnym $n=0$, wypádá $\overline{A}=A+B$, - - (a), uczyniwfzy potém $n=1$, otrzymámy $Ap+Bq=\overline{B}$ - - - - (b) kombinuymy (a) z (b), to ieft mnóżmy nafámprzód (a) przez q, i odciągniymy od niégo (b), wypadnie: $A=\frac{\overline{A}q-\overline{B}}{q-p}$. Mnożmy powtóré (a) przez p, i odtrąćmy od niégo (b), co nám dá - - $B=\frac{\overline{A}p-\overline{B}}{p-q}$ mámy więc liczników ułomków proftych A, B, wyrażonych przez dwa początkowé terminy fzeregu $\overline{A}$, $\overline{B}$, i przez ftopnie ftófunku p, q. Ieżeli funkcyá ułomkowá rozbiéra fię na trzy profte, potrzeba nám na oznaczenie trzech ilości nieznanych, tyleż zrównáń, które wyciągniémy z wyrazu ogólnégo, nadawfzy

dawſzy trzy różné wártości n: będzie więc w tym przypádku każdy licznik ułomku proſtégo wyrażony przez trzy początkowé terminy ſzeregu, i przez ſtopnie związku p, q, r. Zgoła tylé nám potrzeba w tém dochodzeniu zrównáń, na ilé ułomków proſtych rozbiéra ſię funkcyá ſkładaná: té zrównaniá otrzymuiémy z wyrazu ogólnégo, który nám ich podług potrzeby może doſtárczać: idzie więc zatém, że z iakiégokolwiek ułomku ſkładanégo rodzących ſię ułomków proſtych liczniki możémy wyrazić przez początkowé wſpół-czynniki terminów ſzeregowych: liczba tych wſpół-czynników taka będzie wchodzić w wyráz każdégo licznika, iaká ieſt liczba ułomków proſtych, na któré ſię funkcyá rozbiérá. Co oczywiście wypádá z uwági nad ſzeregami i odpowiadaiącemi im wyrazami ogólnémi.

§. XXXVII.

S poprzédzaiących uwág wypádaią nowé właſności zwrotnych ſzeregów co do związku terminów.

Poniéważ każdy termin ſzeregu wyciągaiąc go z wyrazu ogólnégo oznaczámy przez liczniki ułomków proſtych; té zaś liczniki potrafiémy wyrazić przez początkowé terminy ſzeregu, więc możémy każdy náyodlegléyſzy termin ſzeregu wyrazić przez terminy początkowé. Ieżeliśmy więc w ſzeregach zwrotnych potrzebowali pewnéy liczby tuż poprzédzaiących terminów, możémy tę liczbę tuż poprzédzaiących terminów zmniéyſzyć, a na ich miéyſcé wprowadzić początkowé terminy ſzeregu. S kąd nám wypádá naſtępuiącé do rozwiązaniá zadanie: „Ieżeli ſzeregu „zwrotnégo termin każdy zawiſł od liczby pewnéy „tuż poprzédzaiących, wyrazić tén ſám termin przez „liczbę mniéyſzą tuż poprzédzaiących„

Zaczniymy od náyprościéyſzych ſzczególnych przypádków. Dáymy n.p. że ſzereg zwrotny powſtáł z ułomków mianownika $1-a'z+b'z^2$, każdy więc w nim termin zawiſł od dwóch tuż poprzédzaiących, ták dalece, że n. p. $C=a'B-Ab'$. Ieżeli ułomek tén ſkładány rozbiéra ſię na dwa proſté $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}$,

N2 będzie

będzie $a'=p+q$, $b'=pq$, a wyráz ogólny takiégo ſzeregu $(Ap^n+Bq^n)z^n$. Chcąc s tego wyrazu wyciągnąć terminy ſzeregu $\bar{P}$, $\bar{Q}$, znáydziémy $\bar{P}=Ap^n+Bq^n$, $\bar{Q}=Ap.p^n+Bq.q^n$. Zważywſzy dobrze zadanie naſzé, zobaczémy iż w niém o więcéy nie idzie tylko o wynalezienie zrównaniá między $\bar{P}$, $\bar{Q}$. Kombinuymy więc dwa oſtatnié s ſobą, a otrzymámy: $\bar{P}q-\bar{Q}=A(q-p)p^n$ - - $\bar{P}p-\bar{Q}=B(p-q)q^n$. Któré rozmnożywſzy przez ſię, i włożywſzy za $p+q$, a'; za pq, b'; za $-p^2-q^2+2pq=-[(p+q)^2-4pq]=-[a'a'-4b']$, czyli $4b'-a'a'$; otrzymámy

$$\bar{P}^2b'-\bar{P}\bar{Q}a'+\bar{Q}^2=AB(4b'-a'a')b'^n. \text{ - - - } (K).$$

a ponieważ liczniki ułomków proſtych A, B, wyraziliśmy byli przez początkowé wſpół-czynniki ſzeregu,

$$A=\frac{\bar{A}q-\bar{B}}{q-p}, \text{ - - } B=\frac{\bar{A}p-\bar{B}}{p-q}, \text{ będzie}$$

$$AB=\frac{\bar{A}^2b'-\bar{A}\bar{B}a'+\bar{B}^2}{4b'-a'a'},$$ włożywſzy tę wártość za A, B, w zrównanie (K) wypadnie:

$$\bar{P}^2b'-\bar{P}\bar{Q}a'+\bar{Q}^2=(\bar{A}^2b'-\bar{A}\bar{B}a'+\bar{B}^2)b'^n.$$ Zrównanie 2go ſtopnia, któré rozwiązawſzy otrzymámy:

$$\bar{Q}=\tfrac{1}{2}\bar{P}a'+\sqrt{[(\tfrac{1}{4}a'a'-b')\bar{P}^2+(\bar{A}^2b'-\bar{A}\bar{B}a'+\bar{B}^2)b'^n]}$$

ieżeli więc termin iaki ſzeregu zwrotnégo zawiſł od dwóch tuż go poprzédzaiących, wyrazić go możémy tylko przez iedén, ale na tén czás rozwiązać nám trzeba zrównanie 2go ſtopnia. To zrównanie daleko nám ogólniéy rozwięzuie náſzé żadanie, niżeśmy ié poięli, bo maiąc dwa piérwiáſtki, daie nám nie tylko termin tuż naſtępuiący, ale i tuż poprzédzaiący $\bar{P}$; piérwſzy wypadnie, biorąc znak dodatny przed cechą piérwiáſtkową, drugi zaś, biorąc znak odiemny. Ponieważ zaś w teraźniéyſzém zadaniu nie idzie, tylko o termin tuż naſtępuiący po $\bar{P}$, dlá tego położyliśmy tylko ſám znak dodatny przed cechą piérwiáſtkową. Lubo $\bar{Q}$ zamyká w ſobie wyráz piérwiá-

ſtkowy

ſtkowy, że że iednák nie mámy do czynieniá tylko s ſamémi terminami wymiérnémi; $\overline{Q}$ będzie koniecznie wymiérném, i funkcyá pod znakiem piérwiáſtkowym ieſt koniecznie zupełną potęgą drugą.

Maiąc ſzereg powſtaiący z ułomku mianownika $1-a'z+b'z^2-c'z^3$, którégo ułomki cząſtkowé ſą - - $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}$, wyráz zaś ogólny - - - $(Ap^n+Bq^n+Cr^n)z^n$, gdzie $a'=p+q+r$, $b'=pq+pr+qr$, $c'=pqr$: każdy termin w takowym ſzeregu zawiśnie od trzech poprzédzaiących tak dalece: że $\overline{R}=a'\overline{Q}-b'\overline{P}+c'\overline{O}$: chcąc $\overline{R}$ wyrazić przez dwa tylko poprzédzaiącé $\overline{Q}$, $\overline{P}$; a działaiąc tym co wyżéy ſpoſobém, będzie: $\overline{P}=Ap^n+Bq^n+Cr^n$, $\overline{Q}=Ap.p^n+Bq.q^n+Cr.r^n$, $\overline{R}=Ap^2.p^n+Bq^2.q^n+Cr^2.r^n$; S tych trzech zrównáń między ſobą tak iak przdtém kombinowanych wypadnie zrównanie 3go ſtopnia uczącé nás, że ieżeli termin ſzeregu zwrotnégo zawiſł od trzech poprzédzaiących, wyrażémy go przez dwa tylko; ale na tén czás rozwiązać muſzémy zrównanie 3go ſtopnia. A s podobieńſtwa działáń wnoſząc podobieńſtwo wypádków na inné ſzeregi, powinniśmy widzieć w ſamych początkach tę ogólną prawdę: że ieżeli termin ſzeregu zawiſł od m tuż poprzédzaiących, chcąc go wyrazić przez liczbę $m-1$, wpádámy na zrównanie ſtopnia m, któré iakokolwiek pokáże ſię niewymiérné i zawikłané, zawſze iednak po nadanych przyzwoitych wártościach ilościom w nié wchodzącym ſtanie ſię wymiernem.

Zatrzymáwſzy ſię nad świeżo odkrytémi właſnościami ſzeregów zwrotnych, doſtrzeżémy nawet; że każdy termin w takowym ſzeregu może ſię przez iakiékolwiek s poprzédzaiących wyrazić. Każdy bowiem wyráżá ſię przez tuż poprzédzaiącé, więc kładąc za iedné poprzédzaiącé ich znowu wártości w drugich poprzédzaiących, możémy od iakiégokolwiek terminu cofnąć ſię aż do początkowych, i wyrazić

N3 go przez

go przez funkcyą początkowych lub iakichkolwiek innych poprzedzaiących go w szeregu. Rachunek przez eliminacyą mógłby nás o tém náyoczywiściéy przekonáć, który ażeby sobie skrócić, użyimy znowu naszégo początku §. 9. Weźmy w szeregu (ψ) termin maiący iakiś stósunek z odległéyszym na odwrot w w szeregu, n. p. $\overline{X}z^{2n}$, którégo wykładnik dwa razy większy od $\overline{P}z^n$, więc chcąc $\overline{P}$ wprowadzić w wyraz $\overline{X}$, z natury wykładników musi $\overline{P}$ bydź wyniesioné do potęgi drugiéy; wprowadziwszy więc trzy niewiadomé ilości f, g, h, do oznaczeniá trzech terminów potęgi drugiéy; będzie

$$\overline{X}=f\overline{P}^2+g\overline{P}\,\overline{Q}-hABb'^n \quad - - - \quad (c)$$

ponieważ zaś wyráz ogólny daie nám, $\overline{P}=Ap^n+Bq^n$ - - $\overline{Q}=Ap.p^n+Bq.q^n$ - - - $\overline{X}=Ap^{2n}+Bq^{2n}$ - - (d) kładąc w (c) za $\overline{P}$, $\overline{Q}$ iego wártość; i tak przerobioné równaiąc z (d), otrzymámy tylé zrównáń ilé terminów, któré nám posłużą na oznaczenie trzech wprowadzonych nieznanych ilości.

$$f\overline{P}^2= \quad fA^2.p^{2n} + fB^2.q^{2n}+2fAB.b'^n$$
$$g\overline{P}\,\overline{Q}=gA^2p.p^{2n}+gB^2q.q^{2n}+gABa'.b'^n$$
$$-hABb'^n= \quad - - - - \quad -hAB.b'^n$$

równaiąc drugiégo członka terminy podobné z (d), znáydziémy: $f+gp=\frac{1}{A}$, - - - $f+gq=\frac{1}{B}$, - - -

$2f+ga'-h=0$, a przeto $g=\frac{B-A}{AB(p-q)}$, $f=\frac{Ap-Bq}{AB(p-q)}$.

Aże z wyższych zrównáń $B-A=\frac{\overline{A}a'-2\overline{B}}{p-q}$,

$Ap-Bq=\frac{\overline{B}a'-2\overline{A}b'}{p-q}$, - - - - - - - - $AB(a'a'-4b')=$
$-(\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2)$; włożywszy té wártości w

g, f, h, wypadnie: $g=\frac{2\overline{B}-\overline{A}a'}{\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2}$;

$f=$

$$f=\frac{2\overline{A}b'-\overline{B}a'}{\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2},\quad h=\frac{(4b'-a'a')\overline{A}}{\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2};$$

więc $$\overline{X}=\frac{(2\overline{A}b'-\overline{B}a')P^2+(2\overline{B}-\overline{A}a')P\,\overline{Q}}{\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2}-Ab'^n \quad \text{- - } (e)$$

W tém ostatniém zrównaniu znayduie się b'^n, gdzie wykładnik n należy do $\overline{P}$: żebyśmy mieli wyraz terminów przez odleglèyszé sposobém náyogólnièyszym którybyśmy rosciągnąć mogli do innych iakichkolwiek, trzebaby nám wyrzucić b'^n, a zatém znaleśdź drugié zrównanie na $\overline{X}$; możémy więc ieszcze położyć $\overline{X}=f\overline{P}^2+g\overline{Q}^2-hABb'^n$, a działaiąc tak, iak przedtém znaydziémy:

$$\overline{X}=\frac{[a'b'\overline{A}-(a'a'-2b')\overline{B}]\overline{P}^2+(2\overline{B}-a'\overline{A})\overline{Q}^2}{a'(\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2)}-\frac{2\overline{B}b'^n}{a'} \quad \text{- - - } (m)$$

za pomocą dwóch zrównań (e), (m), wyrzuciwszy b'^n, otrzymámy:

$$\overline{X}=\frac{(\overline{A}b'-\overline{B}a')\overline{P}^2-\overline{A}\,\overline{Q}^2+2\overline{B}\,\overline{P}\,\overline{Q}}{\overline{B}^2-a'\overline{A}\,\overline{B}+b'\overline{A}^2} \quad \text{- - - } (n)$$

to zrównanie służyć nám może za wzór do wyrażenia iakiégokolwiek terminu przez inny poprzédzáiący z wykładnikiém połową mnièyszym: n. p. w szeregu (ψ) $\overline{Z}z^{2n+2}$ wyrazić możémy przez $\overline{Q}$, $\overline{R}$, kładąc $\overline{Q}$ za $\overline{P}$, $\overline{R}$ za $\overline{Q}$ w zrównaniu (n): będzie więc

$$\overline{Z}=\frac{(\overline{A}b'-\overline{B}a')\overline{Q}^2-\overline{A}\,\overline{R}^2+2\overline{B}\,\overline{Q}\,\overline{R}}{\overline{B}^2-a'\overline{A}\,\overline{B}+b'\overline{A}^2}$$

A ponieważ $\overline{R}=a'\overline{Q}-b'\overline{P}$ uważaiąc szereg (ψ) iako powstaiący z ułomku mianownika $1-a'z+b'z^2$; włożywszy tę wártość za $\overline{R}$, wypadnie:

$$\overline{Z}=\frac{(\overline{A}b'-\overline{A}a'a'+\overline{B}a')\overline{Q}^2+2b'\overline{P}\,\overline{Q}\,(\overline{A}a'-\overline{B})-b'b'\overline{A}\,\overline{P}^2}{\overline{B}^2+a'\overline{A}\,\overline{B}+b'\overline{A}^2} \quad \text{- - } (p)$$

Maiąc $\overline{Z}$, $\overline{X}$, znaydziémy srzodkuiący między niémi termin

termin $\overline{Y}$ w szeregu (ψ). Mamy bowiem $\overline{Z}=a'\overline{Y}-b'\overline{X}$. więc $\overline{Y}=\frac{\overline{Z}+b'\overline{X}}{a'}$ to iest: - - - - -

$$\overline{Y}=\frac{(\overline{B}-\overline{A}a')\overline{Q}^2+2b'\overline{A}\,\overline{P}\,\overline{Q}-b'\overline{B}\,\overline{P}^2}{b'\overline{A}^2-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2} \quad \text{- - - -} \quad (q).$$

Mamy więc $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ wyrażone przez $\overline{P}$, $\overline{Q}$: ciągnąc daléy tén rachunek przyszlibyśmy ieszcze do wyrażenia dalszych iakichkolwiek terminów przez $\overline{P}$, $\overline{Q}$; a iako $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, znaczyć mogą iakiékolwiek terminy wykładników párzystych albo niepárzystych, tak iako $\overline{P}$, $\overline{Q}$, iakiékolwiek poprzédzaiącé; pokazuie się oczywiście, że w szeregu zwrotnym powstaiącym z ułomku, można iakikolwiek bądź termin wyrazić przez dwa iakiékolwiek s poprzédzaiących, między któremi mięszaią się ieszcze samé początkowé: a zatém w szeregu zwrotnym termin iakikolwiek bydź może uważany iako funkcyá pewná iakichkolwiek s poprzédzaiących. Gdyby nás nawet rachunek był o téy práwdzie nie zapewnił, powinnibyśmy ią byli s prostéy uwági nad naturą szeregów zwrotnych wyciągnąć, i dlá tego łuboby náleżało do innych ieszcze zwrotnych szeregów to dociekanie rosszérzyć; że iednak każdy będzie w stanie iśdź w tém za dopiéro pokázaną drogą, przestaniémy teráz na samym przykładzie obiaśniaiącym to, cośmy w ostatnich zrównaniach zamknęli.

Niech będzie szereg zwrotny $3+7x+18x^2+47x^3+123x^4+322x^5$ i t. d. - - $+Px^n+Qx^{n+1}$ i t. d; powstaiący z ułomku $\frac{3-2x}{1-3x+x^2}$, będzie w nim $\overline{A}=3$, $\overline{B}=7$, $a'=3$, $b'=1$. $\overline{Q}=\frac{3}{2}\overline{P}+\sqrt{(\frac{5}{4}\overline{P}^2-5)}$, a ieżeli $\overline{P}=123$, $n=4$, wynáydziémy $\overline{Q}=322$.

Współ-czynnik terminu x^{2n} - - $\overline{X}=\frac{-14\overline{P}\,\overline{Q}+24\overline{P}^2+3\overline{Q}^2}{5}$

Wspoł-

Wſpół-czynnik terminu x^{2n+1} . . $\overline{Y}=\frac{2\overline{Q}^2+7\overline{P}^2-6\overline{P}\,\overline{Q}}{5}$

Wſpół-czynnik terminu x^{2n+2} . . $\overline{Z}=\frac{3\overline{P}^2-3\overline{Q}^2-4\overline{P}\,\overline{Q}}{5}$

§. XXXVIII.

Teorya ſzeregów zwrotnych prowadzi nás do wynaydowaniá pierwiáſtków bliskich prawdy w zrównaniu.

Związmy teráz to, co nám ſię z uwági nad ſzeregami pokázało. W nich chcąc odkryć wyráz ogólny, muſieliśmy mianownika rozbierać na ſwé mnożniki, s których powſtáwały ułomki cząſtkowé. Potrafiliśmy przez dopiéro poprzédzaiący §. liczniki ułomków proſtych oznáczać przez początkowé terminy ſzeregu: gdybyśmy ieſzcze przez terminy ſzeregu mogli mianowniki ułomków proſtych wynaleśdź, mielibyśmy nowy ſpoſób rozbiéraniá funkcyi ſkładanéy na ſwé mnożniki. Dotąd bowiem tén rozbiór czyniliśmy za pomocą zrównáń, który tak daleko tylko może ſię rosciągnąć, iak daleko naſzé wiadomości o zrównaniach zaſiągaią. S kąd łatwo każdy ſobie wnieſie, że gdyby teorya ſzeregów nauczyła nás ſpoſobu innégo wynaydowaniá mianowników ułomków proſtych; nauczyłaby nás także ſztuki dochodzeniá piérwiáſtków iakiégokolwiek zrównaniá. Mianowniki ułomków proſtych wyrażaliśmy wzorém $1-pz$; maiąc więc p, mámy to wſzyſtko co do odkryciá mnożnika proſtégo w funkcyi, a w zrównaniu do odkryciá piérwiáſtku náleży. Szukáymy czyli terminy iakiégokolwiek ſzeregu nie odkryią nám wártości na p.

Dáymy że funkcyá ſkładaná $\frac{M}{N}$ rozbiéra ſię na ułomki cząſtkowé $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}+$ i t. d. a zatém $N=(1-pz)(1-qz)(1-rz)$ i t. d: wyrazém zaś ogólnym téy funkcyi ieſt: $(Ap^n+Bq^n+Cr^n+\text{i.t.d.})z^n$ $=\overline{P}z^n$. drugi po nim naſtępuiący termin w ſzeregu, má wyráz ogólny $(Ap.p^n+Bq.q^n+Cr.r^n+\text{ i t. d.})z^{n+1}$

$=\overline{Q}z^{n+1}$, gdybyśmy chcieli s tych dwóch wyrazów wyciągnąć wártość na p; potrzebaby, albo q, r, i t. d. wyrazić przez p, co ieſt rzeczą barzo trudną; albo żeby q, r, i t. d. w terminach cáłkiém znikły. Gdybyśmy nawet potrafili q, r, wyrazić przez p, niewielebyśmy na tém zyſkali; bo wpádłſzy na zrównanie ſtopnia n, niebylibyśmy w ſtanie rozwiązać ié. Zeby zaś q, r, i t. d. zniknąć mogły przed p, potrzebaby *náprzód:* aby q, r, były barzo małé względém p; *powtoré:* aby n było liczbą nieſkończenie wielką; wiémy bowiem z Arytmetyki, że liczby nieró-wné tém ſię barziéy od ſiebie w wartości oddalaią, im do wyżſzéy potęgi bywaią podnieſioné; gdyby więc p było większé od q, r; w wyżſzych potęgach coraźby ié barziey przewyżſzało, tak dalece, że w potędze n nieſkończenie wielkiéy, q, r, zupełnieby znikły w porównaniu p. Zniknąwſzy q, r, zoſtanie ſię z wyrazów ogólnych $Ap^n=\overline{P}$, $Ap.p^n=\overline{Q}$, więc - - $\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}=p$, to ieſt: że termin nieſkończenie odległy w ſzeregu, rozdzielony przez poprzédzaiący, dałby wártość na p zupełną. Ieżeli zaś n nie będzie liczbą nieſkończenie wielką; q, r, nie znikną cáłkiém przed p, ale tém będą od niego mniéyſzé, im n będzie większém; ieżeli więc za n weźmiémy liczbę znacznie wielką, a maleiące barzo q, r, opuſzczémy; będziemy mieli tylko wártość bliſką prawdy na p, uczyniwſzy $\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}=p$. to ieſt: ieżeli weźmiémy w ſzeregu barzo odległé terminy, i ieden z nich rozdzielémy przez poprzédzaiący, otrzymámy za wieloráz p, s którego $1-pz$ dá mnożnika funkcyi: tén przerobiony na zrównanie przez wprowadzony związek, wydá $1-pz=0$, $z=\frac{1}{p}$, ieżeli więc p było naywiękſzym mnożnikiém podług naſzégo przypuſzczenia,

niá, $z = \frac{1}{p}$ będzie pierwiáſtkiem tego zrównaniá náymnieyſzym, ale tylko bliſkim prawdy.

Stych barzo proſtych uwág wyciągnął W. Geometra *Daniel Bernoulli* ſpoſób wynaydowaniá pierwiáſtków bliſkich prawdy i podał go w tomie III. Pamiętników Peterzburſkich, którego nám tu użycie przypádá z dokładnością wyłożyć. Spoſób ten, iak nám ſię dopiero pokázáł, potrzebuie koniecznie, aby zrównanie podane do rozwiązaniá obrocić na mianownika ułomku: s tego potem zrobić ſzereg nieſkończony, którego dwá odległe terminy przez ſię rozdzielone dadzą pierwiáſtek náymnieyſzy, ale tylko bliſki prawdy. Dáymy więc że takowem zrównaniem ieſt $N = o$. zniſzczywſzy w niem związek, będzie N funkcyą, i oráz mianownikiem, a iego wſpół-czynniki ſtopniami ſtóſunku, od których wártość terminów w ſzeregu zawiſła. Nie maiąc oznaczonego licznika takowego ułomku, weźmy początkowe terminy ſzeregu podług upodobaniá: wiemy bowiem z §. 32. że licznik ułomku rozebranego ná ſzereg, nie wpływá tylko w wártość tylu początkowych terminów ſzeregu, ile on ſám má terminów w ſobie; s tych początkowych od upodobaniá terminów ułożemy inſze s ſtopniów ſtóſunku, a poſunąwſzy te terminny daleko, rozdzielemy náyodleglieyſzy przez tuż go poprzedzaiący, co nám dá wártość na p, a z niey $z = \frac{1}{p}$, pierwiáſtek náymnieyſzy zrównaniá.

Przykład 1wſzy. Wynaleśdź pierwiáſtek náymnieyſzy zrównániá: $1 - 15z + 66z^2 - 80z^3 = o$:

Będzie: $\frac{M}{1 - 15z + 66z^2 - 80z^3}$; s tego ułomku powſtanie ſzereg, ktorego każdy termin będzie funkcyą trzech poprzedzaiących; ſtopnie zaś ſtóſunku ſą 15, 66, 80, tak dalece, że n. p. $\overline{Q} = 15\overline{P} - 66\overline{O} + 80\overline{N}$; $\overline{P}$,

 $\overline{Q}$, $\overline{N}$,

$\overline{O}$, $\overline{N}$, znaczą terminy szeregu zaráz poprzedzaiącé Q; wziąwszy więc trzy początkowé terminy od upodobaniá, n. p. 1, 2, 6, wypadnie szereg:

1, 2, 6, 38, 334, 2982, 25726, 215798, i t. d. s kąd $\frac{215798}{25726}=8,39221=p$. gdybyśmy tén szereg daléy ciągli, ułomek dziesiątkowy 39221 corázby malał, a piérwiástek przez to corázby się powiększał, tak dalece, iżbyśmy w odlegleyszych terminach trafili na $p=8$ blisko; a zatém na $z=\frac{1}{p}$, blisko $\frac{1}{8}$, który iest práwdziwym náymnieyszym piérwiástkiém zrównaniá podanego.

Przykład 2gi. Niech będzie podané zrównanie: $1-16z+77z^2-134z^3+72z^4=0$, wynaleśdź iego piérwiástek naymnieyszy?

Ponieważ zrównanie iest 4go stopnia, więc w szeregu s tąd powstaiącym każdy termin zawist od czterech poprzedzaiących, to iest: $Q=16P-77O+134N-72M$; wziąwszy cztéry początkowé terminy od upodobaniá, otrzymámy szereg liczb:

0, 1, 1, 2, 136, 2084, 23068, 215700, i t. d. zaczém $\frac{215700}{23068}=9,351=p$: więc $z=\frac{1}{p}=\frac{1}{9,351}$, to iest piérwiástek náymnieyszy iest bliki $\frac{1}{9}$:

Gdybyśmy zaś chcieli zrównaniá podanégo odkryć piérwiástek náywiększy, potrzebaby nám ié przerobić na inné, ktoregoby piérwiástek náymnieyszy, był náywiększym zrównaniá podanégo; to iest trzeba uczynić $z=\frac{1}{x}$, a tak zrównanie na z, przerobiémy na - - - $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+$ i t. d. $+k=0$. szukaiąc potém tego ostatniégo zrównaniá piérwiástku, znáydziémy $x=\frac{1}{p}$, a s tąd $z=p$, piérwiástek náywiększy-

Maiąc

Maiąc n. p. zrównanie podané: $24-35z+12z^2-z^3=0$, a uczyniwszy w niém $z=\frac{1}{x}$ przerobiémy ié na $1-12x+35x^2-24x^3=0$. s którégo powstanie szereg liczb: 1, 1, 5, 49, 437, 3649, 29669, 238801, i t. d. zaczém $\frac{238801}{29669}=8,015133=p=z$, to iest, że pierwiastek nayiększy zrównaniá podanégo iest bliski 8: gdybyśmy daléy ciągli szeręg liczb: trafilibyśmy na liczbę mniéyszą od znalezionéy, któráby się niezmiernie mało różniła od 8, prawdziwégo pierwiastku zrównaniá.

Maiąc przytomné w myśli té wszystkié początki i rozumowaniá, s którycheśmy teraźnieyszą wyprowadzili naukę, przyznámy; że tén sposób nie barzo nám się udá, kiedy zrównanie zawieraé będzie pierwiastki barzo siebie bliskié, tak dalece, że w wyższych potęgach ich wzrost mało się co różni, a zatém nie możná w tym przypadku iednégo s takich pierwiastków brać za niknący w porównaniu drugiégo. Na tén czás potrzeba nám koniecznie przerobić zrównanie podané na inné, w którémby dwa té bliskié siebie pierwiastki koniecznie się barziéy różniły: czego dokażémy kładąc w niém za ilość nieznaną inną powiększoną lub zmniéyszoną iakąkolwiek liczbą k; s kąd powstanie zrównanie maiącé za náymniéyszy pierwiastek to tylko, co brakuie k do pierwiastku prawdziwégo. Maiąc n.p. zrównanie podané: $z^3-z^2+5z+5=0$, którégo náywiększé dwá pierwiastki są $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$, niczém się od siebie prócz znaku nie różniące: gdybyśmy w niém podług podanégo sposobu działali, trafilibyśmy na szereg: 1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, i t. d. s których żadné dwie przyległé liczby, nie daią pierwiastku wzmiankowanégo. Przestępuiąc zaś o ieden termin, i dzieląc każdy przez wtóry przed nim idący, znáydziémy kwadrat pierwiastku szukanégo, to iest: $\frac{1563}{313}$

Uwága nad sposobém poprzedzaiącym.

$= \frac{938}{188} = \frac{313}{63} = 5$, co nám daie widzieć, że ilé razy taki trafi ſię liczb ſzereg, którégo terminy wſzyſtkié na przemián daią tén ſám wielo-ráz; zrównanie go wydaiącé, zamyká koniecznie pierwiáſtki té ſamé, lecz z znakiem przeciwnym. Uczyniwſzy zaś w zrównaniu podaném $z = y + 2$, przerobiémy ié na: $1 - 3y + 5y^2 - y^3 = 0$. s którégo powſtanie ſzereg liczb: $1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945$, i t. d. s kąd: $\frac{2585}{10945} = 0,2361 = y$, $z = 2,2361$, co ieſt bliſkie $\sqrt{5}$.

Spoſób Newtona prowadzący do pierwiáſtków zrównániá coráz bliższych práwdy.

Sztuka ta rozdzieleniá pierwiáſtku w zrównaniu daleko ieſzcze rozległéyſzé może mieć użycie: doſzedłſzy n. p. przez iakikolwiek ſpoſób pierwiáſtka bliſkiégo w zrównaniu, a chcąc to zbliżenie daléy poſunąć, powiękſzámy naſz pierwiáſtek liczbą nieznaną k, któréy potem wyciągnąwſzy wártość z zrównaniá, otrzymuiémy przydátek do pierwſzégo pierwiáſtku, zbliżaiący nás barziéy do práwdy.

Niech będzie n.p. zrównanie $x^3 + 5x + 7 = 0$, którégo bliſki pierwiáſtek przez iakikolwiek ſpoſób znaláżłſzy równy $-1, 1$ a chcąc doyśdź bliżéy práwdy, kładę $x = -1, 1 + k$; k znaczy tu ułomek maiący bydź dodany do $-1, 1$; tę wártość za x położywſzy w zrównaniu $x^3 + 5x + 7 = 0$, przerobiémy ié na: $k^3 - 3,3k^2 + 8,63k + 0,169 = 0$. a ponieważ k ieſt ułomkiém mniéyſzym od $0, 1$; k^3, k^2, będą mniéyſzémi od $0, 001, 0, 01$; przeto możémy ié całe opuścić: zoſtanie ſię więc: $8, 63k + 0, 169 = 0$, a zatém $k = -\frac{0,169}{8,63} = -0, 019$. Pierwiáſtek więc zrównaniá podanego bliżſzy, będzie $x = -1, 1 + k = -1, 119$. Chcąc ieſzcze doyśdź bliżéy, czynię $x = -1, 119 + u$, a włożywſzy tę wártość w zrównanie podané przerobię ie na u, w którém opuściwſzy u^3, u^2, zoſtanie nám $8,756483u + 0,003831842 = 0$, s kąd $u = -0, 00044$; $x = -1, 119 + u = -1, 11944$: tym ſpoſobém moglibyśmy ciągnąć naſzé zbliżanie do barzo wielu cząſtek dzieſiątkowych.

kowych. Nawet w przerobionych zrównaniach na z, u, moglibyśmy nie opuſzczac tylko z^3, u^3, a pozoſtałé zrównanie 2go ſtopnia rozwiązawſzy, trafilibyśmy prawie na té ſamé wypádki.

Tén ſpoſób barzo wygodny nálezałoby nám rozleglé́y wyłożyć, ale iego zrozumienie tak ieſt proſté i łatwé, iż przywiedziony przykład może nám wyſtarczyć do nauczeniá nás iego w iakiémkolwiek zrównaniu. *Newton* náypierwéy go podał w ſwéy Arytmetyce powſzechnéy, a przyſtóſowanie go terażniéyſzé do teoryi *Bernoullego* ieſt tylko ſzczególnym tego ſpoſobu przypádkiém.

Teorya Bernoullego nie ſłuży, kiedy zrównanie ma pierwiáſtki równé.

Drugá uwágá która nám ſię w użyciu teoryi *Bernoullego* ſtawić powinna, sciąga ſię do pierwiáſtków zrównániá równych. Pamiętáymy że $\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} = p$ wypádło nám z wyrazu ogólnégo ſzeregu, w którym inné ilości q, r, i t. d. uważaliśmy iako nierowné i niknące w porównaniu z p. Przypuśćmy teráz że miánownik ułomka ſkładanégo zamyká mnożniki równé, s których powſtaią ułomki cząſtkowé $\frac{A}{(1-pz)^2} + \frac{B}{1-pz} + \frac{C}{1-qz} + \frac{D}{1-rz}$ i t. d. ich wyrazy ogólné razém dodané będą: $[(n+1)Ap^n + Bp^n + Cq^n + Dr^n +$ i t. d.$]z^n = \bar{P}z^n$; $[(n+2)Ap^{n+1} + Bp^{n+1} + Cq^{n+1} + Dr^{n+1} +$ i t. d.$]z^{n+1} = \bar{Q}z^{n+1}$; przypuściwſzy nawet że p ieſt tak wielkié, iż q, r, i t. d. przed niém w znacznych potęgach nikną, zoſtanie ſię: $[(n+1)Ap^n + Bp^n] = \bar{P}$ - - - - $[(n+2)Ap^{n+1} + Bp^{n+1}] = \bar{Q}$ - - $\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} = \frac{(n+2)A+B}{(n+1)A+B}p > p$.

Widzemy więc, że poſunąwſzy gdyby naydaléy ſzereg liczb z zrównaniá powſtaiący, nie trafiémy na wártość p, ale zawſze nám wypadnie pierwiáſtek większy od rzetelnégo, chyba żeby n było liczbą nieſkończoną; to ſamo znáydziémy na liczbę większą pier-

pierwiáſtków równych: co nám dowodzi że użycie ſpoſobu dopiero wyłożonego nie może nám ſię tak udadź iak w pierwiáſtkach nierównych. Zeby więc podane zrównanie możná beſpiecznie przez ſpoſób *Bernoullego* traktować, trzeba nám ſię wprzód przekonać; czyli to nie zamyká w ſobie pierwiáſtków równych. Iakże tego będziem mogli dociec?

§. XXXIX.

Spoſób rozeznaniá pierwiáſtków równych w zrównaniu.

Pierwiáſtki równe nálężą do ſwégo ogólnego wyrazu $(a+x)^m$, który nám wzór *Newtona* pokazuie. Szukáymy w właſnościach tego wzoru przyzwoitey cechy, na rozeznanie takowych pierwiáſtków. Na ten koniec przypomnieć nám ſobie potrzeba to, cośmy w pierwſzey Części na końcu §. 12. o potęgach doſtrzegli: że maiąc funkcyą $M(a+x)^m$, i tę rozebraną na ſwoie terminy rozmnożywſzy przez poſtęp Arytmetyczny ok, k, $2k$, $3k$, $4k$, i t. d. zniżemy ią o ieden ſtopień; będzie bowiem mnogość równá $Mmkx(a+x)^{m-1}$. Aże zrównanie zamykaiące iakąkolwiek liczbę pierwiáſtków równych wyrazić możemy przez $(a+x)^m(a'+b'x+c'x^2+$ i t. d.$)=o$, albo przez $(a+x)^m(b+x)^n(a'+b'x+c'x^2+$ i t. d.$)=o$ rozebrawſzy $(a+x)^m$, $(b+x)^n$ na ſwe terminy, i te rozmożywſzy naſamprzód wſzyſtkie przez $a'+b'z+c'z^2$ + i t. d. potem każdy z oſobna przez podłożony ſobie termin poſtępu Arytmetycznego ok, k, $2k$, $3k$, i t. d. obydwie potęgi zniżą ſię o ieden ſtopień, i zrównanie umnieyſzy ſię iednym s każdego gatunku pierwiáſtkiem równym. Ieżeli więc całe było rozdzielne przez $(a+x)^m.(b+x)^n$, po tem rozmnożeniu będzie tylko rozdzielne przez - - - $(a+x)^{m-1}.(b+x)^{n-1}$. To atoli oſtatnie przerobione zrównanie ma s pierwſzem za ſpólnego mnożnika $(a+x)^{m-1}.(b+x)^{n-1}$; s kąd wypadá takie prawidło: „że zniżywſzy zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia o ieden, „ieżeli znáydziemy w niem ſpolnego mnożnika s podanem; zrównanie takowe będzie zamykało pierwiáſtki równe.„

Teráz

Teráz maiąc podane ſobie do rozwiązaniá zrównanie, potrzeba ié naſámprzód dopełnić, ieżeliby których terminów brakowało, piſząc ié w ſwym porządku z mnożnikiém zero; tak dopełnioné rozmnóżmy ſpoſobém iuż wyłożonym przez poſtęp Arytmetyczny liczb, który lubo od upodobaniá zawiſł, dlá proście'yſzégo atoli działaniá obierzémy poſtęp *o*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, i t. d. takim ſpoſobém zrównanie zniży ſię o iedén ſtopień, które nazwiémy *przerobionem*: ſzukáymy powtóré przez §. 21. mnożnika ſpólnégo obydwom zrównaniom. S kąd wypadną naſtępuiącé przypádki i wnioſki do nich przywiązané:

Ieżeli tén mnożnik będzié piérwſzégo ſtopnia $(x-p)$, zrównanie podané, będzie miało dwa piérwiáſtki równé $(x-p)^2$

Ieżeli mnożnik ſpólny ieſt drugiégo ſtopnia, rozebrać go potrzeba na dwa *1go* ſtopnia, które albo będą równé albo nierówné: w piérwſzym przypádku zrównanie podané má trzy piérwiáſtki równé, s których każdy wyráżá ſię przez tego mnożnika przywiedzionego do zero: w drugim zaś przypádku zrównanie má cztéry piérwiáſtki równé; s których każdé dwa ſą różnégo gatunku i wyrážaią ſię przez iednégo z mnożników.

Zgoła ieżeli mnożnik ſpólny obydwóch zrównań ieſt ſtopnia n, rozebrać go należy na n mnożników piérwſzégo ſtopnia: té ieżeli będą wſzyſtkié rowné, zrównanie podané má $n+1$ piérwiáſtków równych tego ſamégo gatunku; ieżeli zaś będą wſzyſtkié nierówné zrównanie má $2n$ mnożników równych co do liczby, a zaś n co do gatunku; każdému bowiem różnému mnożnikowi odpowiadá pára piérwiáſtków tego ſamégo gatunku. Ieżeli w liczbie n mnożników iedné będą równé, drugié nierówné, liczbę każdégo gatunku powiękſzyć należy iednością; a zbiór ich pokáże liczbę piérwiáſtków równych w zrównaniu podaném:

Przykład I. Niech będzie zrównanie podané x^4-

O $3x^3-6x^2$

$3x^3-6x^2+28x+24=0$, wynaleśdź czyli, i wiele má pierwiáſtków równych?

Rozmnóżmy każdy iego termin przez podłożoną mu liczbę poſtępu Arytmetycznego $4, 3, 2, 1, 0$: wypadnie s tąd zrównanie przerobione $4x^3-9x^2-12x+28=0$, które má za mnożnika ſpólnie z zrównaniém podaném: $x^2-4x+4=(x-2)^2$, co pokazuie, że zrównanie podane má trzy pierwiaſtki równe $(x-2)(x-2)(x-2)=x^3-6x^2+12x-8=0$, przez to zrównanie $3go$ ſtopnia rozdzieliwſzy podane, otrzymámy czwárty pierwiáſtek $x+3=0$.

Przykład II. Maiąc zrównanie $x^4-10x^3+37x^2-60x+36=0$, wynaleśdź iego pierwiáſtki równe?

Wziąwſzy poſtęp Arytmetyczny liczb $4, 3, 2, 1, 0$, i przez każdy iego termin rozmnożywſzy termin zrównaniá, zniżémy ié o ieden ſtopień: $4x^3-30x^2+74x-60=0$. ſzukaiąc náywiękſzego mnożnika ſpólnego obydwóm zrównaniom, znáydziémy go x^2-5x+6: ten mnożnik rozebrany na dwa pierwſzego ſtopnia daie $x=2$, $x=3$, co pokazuie że zrównanie podane má dwa pierwiáſtki równe iednego gatunku - - - $(x-2)^2=0$, i dwa równe drugiego gatunku $(x-3)^2=0$ Mnogość bowiem $(x-2)^2(x-3)^2=0$ wydá zrównanie podane.

Wynalázek więc pierwiáſtków równych zawiſł od ſpoſobu rozbieraniá zrównań na ſwe mnożniki, który iak ieſt niedokładny widzieliśmy w §. 21. Nie możémy więc przyiśdź do rozeznaniá pierwiáſtków równych tylko w pewnych ſzczególnych przypádkach, które iednak pomóc nám wiele mogą w ſtóſowaniu teoryi *Bernoullego*. Widzieliśmy bowiem, że ta nie może ſię udadź chyba z znacznem oddáleniem ſię od prawdy, ieżeli zrównanie zamyká pierwiáſtki równe. Chcąc przeto naukę ſzéregów zwrotnych beſpiecznie i ſzczęśliwie ſtóſować do wynalezieniá pierwiáſtków bliſkich, należy nám wprzód ſię przekonać przez dopiero podany ſpoſób, że zrównanie nie má pierwiáſtków równych, to ieſt: że zrównanie podane,

né, i drugié znižoné o ieden ftopień, nie maią žadnégo pierwiáftku fpólnégo.

Przebiegliśmy iuž pierwiáftki równé i nierówné ale zawfze rzetelné; zoftaie nám iefzcze ftółować fzeregi zwrotné do wynalezieniá pierwiáftków uroionych. Poniewáž každé zrównanie pokazuie fię w wyrazach rzetelnych, fzeré g z niégo powftaiący, a w tym fzeregu wieloráz z rozdzieleniá iednégo terminu przez poprzédzaiący, nie može bydź tylko rzetelny. Idzie więc zatém žé pierwiáftków uroionych w zrównaniu nie možémy fzukać za pomocą fzeregów, tylko zamieniaiąc té pierwiáftki na rzetelné przez množenie ich po dwa na ráz. Chcąc zaś fzukać dwoiftych takowych pierwiáftków, potrzeba nám znowu fzczególnégo wyrazu któryby oznaczał mnogość rzetelną, powftaiącą z dwóch pierwiáftków uroionych: dlá czego tén przypádek mufzémy nižfzym uwágom zachować.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zbieranie fzeregów zwrotnych prowadzi nás do poznaniá Ułomków ciągłych, których fię wykładaią znakomitfzé włáfności i užycie.

§. XL.

Pierwfzy widok rzucony ogólnie na naturę i rodzáy fzeregów, podał nám trzy zadaniá zawiéraiacé cała rozległość téy nauki. Rozwiązaliśmy ich iuž dwa, bo nafámprzód wyłožyliśmy barzo ogólny fpofób rozbiéraniá funkcyi ułomkowych iakichkolwiek na fzeregi: fpofób wydobyty z natury ilości nieoznaczonych, który ieft iednem z naypiękniéyfzych wynalazków *Des-Carta*. Włáfności róžné fzeregów w tym rozbiorze doftrzežoné pofłužyły nám do odkryciá ftó-

Summowanie fzeregów zwrotnych, wiedząc zwiazek zachodzący między terminami.

funku między wfpół-czynnikiém iakiégokolwiek terminu, i wykładnikiém ilości nieznanéy w tymże terminie: co nám pokazuie układ káżdégo terminu w iednym wyrazie który nazwano *wyrazém ogólnym*. Zoftaie nám ieszcze do wynalezieniá fpofób wrácaiący nás od fzeregu do funkcyi, która go wydała, a którą my nazwiémy RODZĄCĄ (*Functio, Fractio generatrix*). Ieżeliśmy dobrze obięli práwdy §. 32, uznámy że rozwiązanie zadaniá trzeciégo ieft náyważnieyfzą cząftką nauki o fzeregach. W niém zamierzámy fobie wynaleśdź każdégo fzeregu wyráz fkończony, któryby tylé wártał, ilé wfzyftkié terminy fzeregu razém dodané, lub pewná ich liczbá. Spofób tén nazwano ZBIERANIEM albo SUMMOWANIEM SZEREGÓW (*Summatio Serierum*).

Ponieważ dotąd iedén tylko gatunek fzeregów przypadło nám roftrząfać, któréśmy zwrotnémi nazwali; dlá tego będziémy fię tylko teráz zaftanáwiać nad zbiéraniem fzeregów do tego gatunku náleżących, to ieft nad wynaydowaniém funkcyi ułomkowéy któráby była równą fzeregowi podanému. Nie możémy zaś wiedzieć że fzereg podany ieft zwrotny, nie będąc pewnémi, że w nim każdy termin ieft funkcyą poprzedzaiących; poznáwfzy tę funkcyą, wiedzieć razém będziémy ftopnie ftófunku, a zatém i mianownika ułomku. Nie idzie więc w takim przypádku tylko o wynalezienie licznika, który w famych tylko początkowych terminach fzeregu ieft zawarty. Iakże go odkryiémy? oto przez té famé początki ilości nieoznaczonych, które nám dotąd fłużyły: maiąc przez ftopnie ftófunku danégo mianownika, wprowadzémy w licznika ilości nieoznaczoné $a, b, c, d,$ i t. d. a rozebráwfzy potém taki ułomek na fzereg, przez porównanie terminów wypadną nám wártości na niewiadomé a, b, c, d, i t. d. Dáymy n.p. że $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4 - - - +Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+$ i t. d. ieft fzeregiém podanym: że związek doftrzeżony między terminami fzeregu przyprowadził

nás

nás do mianownika $1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4$, będzie ułomek rodzący $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4}$, który zebráwſzy na ſzereg i przywiódłſzy do zero, znáydziémy: $a=A$ - - - - - $c=C-Ba'+Ab'$

$b=B-Aa'$ - - $d=D-Ca'+Bb'-c'A$,

a przeto ſumma ſzeregu nazwaná (s) będzie

$$s=\frac{A+(B-Aa')z+(C-Ba'+Ab')z^2+(D-Ca'+Bb'-Ac')z^3}{1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4}$$

Chcąc zaś zbiérać ſzereg do pewnégo tylko terminu n.p. Pz^n, nazwáwſzy ſummę terminów od początku aż do końca (s), ſummę zaś terminów od Pz^n aż do końca nazwáwſzy (s'), będzie $s-s'$, ſummą terminów od początku aż do Pz^n.

$s'=Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+$ i t. d.

który rozdzieliwſzy przez z^{n+1}, otrzymámy ſzereg takiégo wzoru iak podany; a przeto - - - $s'=$

$$\frac{Qz^{n+1}+(R-Qa')z^{n+2}+(S-Ra'+Qb')z^{n+3}+(T-Sa'+Rb'-Qc')z^{n+4}}{1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4}$$

co odciągnąwſzy od piérwſzéy ſummy, otrzymámy zbiór terminów aż do Pz^n. Ieżeli mianownik ułomku będzie wyżſzégo lub niżſzégo ſtopnia, ſpoſób znalezieniá licznika będzie tén ſám.

Niech będzie n.p. ſzereg podany: $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4$ - - - $+Pz^n+$ i t. d. w którym każdy termin ieſt ſummą dwóch poprzédzaiących; mianownik zaś ułomku ieſt $1-z-z^2$, gdzie $a'=1$, $b'=-1$, $A=1$, $B=3$. Summa więc tego ſzeregu aż do Pz^n będzie:

$$s-s'=\frac{1+2z-Qz^{n+1}-(R-Qa')z^{n+2}}{1-z-z^2}=\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-z^2}$$

gdyż $R-Qa'=-Pb'$. Aże według §. 37.

$Q=\frac{P+\sqrt{(5P^2\pm 20)}}{2}$, włożywſzy tę wártość za Q w ſummę, i uczyniwſzy $z=1$, wypadnie ſumma liczb:

$$1+3+4+7+11+18 \; - \; - \; - \; +P = \frac{3P-6+\sqrt{(5P^2 \pm 20)}}{2};$$

można więc wyrazić fummę do pewnego iakiego terminu, przez funkcyą terminu oftatniego.

§. XLI.

Nie wiedząc związku między terminami fzeregu, fpofób wynalezienia go, i rozeznania fzeregów zwrotnych od innych.

Wziąwfzy na uwagę fpofób zbierania fzeregów dopiero wyłożony, znaydziemy że ten potrzebuie w nas wiadomości o gatunku fzeregu, i o związku zachodzącym między iego terminami: obrani choć z iedney takowey wiadomości nie możemy bydź w ftanie naznaczenia mianownika ułomku, a zatem ani fummy fzeregu. Gdybyśmy zadanie o zbieraniu fzeregów mogli nię zawiśle od tych wiadomości rozwiązać, niezmierniebyśmy rozleglèyfzey doftąpili o fzeregach nauki. Usiłuymyż więc do takiego zamiaru rozwiązać zadanie naftępuiące: „Maiąc podany fobie iakikolwiek fzereg, doyiśdź fpofobu rozeznania czyli „ten ieft zwrotny lub nie; a będąc takim, wynaleśdź „iego ułomek rodzący?„ Nim przyftąpiemy do rozwiązania tego zadania zgódźmy fię nazywać fzeregi te, które powftaią z ułomków mianownika *1go, 2go, 3go, 4go, mgo* ftopnia; *Szeregami 1go, 2go, 3go, 4go, mgo Porządku*, iakeśmy iuż pod §. 33 uczynili, mówiąc o fzeregach Algebraicznych. Zeby fię dowiedzieć, czyli fzereg podany iakikolwiek ieft zwrotny lub nie; potrzebaby doyiśdź, czyli on powftał z ułomku wymiernego, w którym licznik ieft niżfzey potęgi od mianownika, a przeto potrzebaby nam znaleśdź fpofób przerobienia fzeregu na ułomek.

Szereg zwrotny rodzi fię z ułomku przez ciągłe dzielenie, s którego nowy wieloraz daie nowy termin fzeregu; potrzebaby nam więc w tem famem działaniu fzukać fpofobu wrócenia fię od tych ciągłych wielorazów do famey funkcyi dzielącey i podzielney. Niech będzie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+$ i t. d. $=s$ fzeregiem zwrotnym pierwfzego porządku, będzie iego ułomek rodzący pierwfzego ftopnia, czyli $s = \frac{a}{a'+b'z}$;

więc

więc $\frac{1}{s}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{a}z=p+qz$, kładąc p za $\frac{a'}{a}$; q za $\frac{b'}{a}$; a przeto wieloráz tego dzieleniá będzie funkcyą skończoną: s kąd wypádá, że rozdzieliwszy iedność przez szereg podany, ieżeli s tego dzieleniá otrzymámy wieloráz wzoru $p+qz$, bez żádnéy reszty; szereg nász będzie szeregiém zwrotnym *Pierwszégo porządku*, a iedność rozdzieloná przez tén wieloráz będzie ułomkiém rodzącym i razém summą szeregu.

Ieżeli szereg podany ieſt drugiégo porządku, náleży on do ułomku drugiégo stopnia $\frac{a+bz}{a'+b'z+c'z^2}=s$, będzie więc $\frac{1}{s}=\frac{a'+b'z+c'z^2}{a+bz}$ a wykonawszy to dzielenie i nazwáwszy współ-czynnika reszty $\frac{bb'}{a}+c'$, (a''); otrzymámy $\frac{1}{s}=p+qz+\frac{a''z^2}{a+bz}$. Uwáżaiąc to dzielenie w szeregu nieskończonym s, widziémy że przezeń rozdzieloná iedność wydá za wieloráz $p+qz$, i oprócz tego zostanie się reszta rozdzielná przez z^2: ta reszta będzie szeregiém znowu nieskończonym, którego s ieſt dzielnikiém. Nazwiymy tén szereg pozostały (s') wyrażaiąc go przez $T+T'z+T''z^2+T'''z^3+$ i t. d. Będzie więc równaiąc wieloráz z ułomku skończonégo z wielorazém szeregowym:

$$\frac{1}{s}=p+qz+\frac{s'z^2}{s}=p+qz+\frac{a''z^2}{a+bz}\text{; więc }\frac{s'}{s}=\frac{a''}{a+bz}$$

a przeto $\frac{s}{s'}=\frac{a}{a''}+\frac{b}{a''}z=p'+q'z$; co nás uczy; że rozdzieliwszy iedność przez szereg nieskończony s, i otzymáwszy $p+qz$, z resztą s', która ieſt także szeregiém nieskończonym, ieżeli przez tę resztę s' dzieląc powtórnie szereg podany s, przyidziémy do wielorazu skończonégo bez żádnéy reszty; szereg takowy będzie szeregiém zwrotnym *drugiégo Porządku*, któ-

rego ułomek $\frac{s}{z} = \dfrac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2} = \dfrac{1}{p+qz+\frac{z^2}{p'+q'z}} = s.$

Ieżeli ſzereg ieſt *3go* porządku; ułomek go rodzący muſi mieć mianownika *3go* ſtopnia, będzie więc:

$$s = \frac{a+bz+cz^2}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3},\ \frac{1}{s} = \frac{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}{a+bz+cz^2},$$

wykonáwſzy to działanie otrzymámy za ilość ſkończoną $p+qz$, i reſztę pozoſtałą $\frac{a''z^2+b''z^3}{a+bz+cz^2}$, przez p, q, a'', b'', znacząc wſpół-czynniki z, które s tego dzieleniá wypadną. A ponieważ to działanie które tu odbywámy z ułomkiem, odbywać należy s ſzeregiem nieſkończonym; reſzta s tego dzieleniá będzie ſzereg nieſkończony s' rozdzielny przez z^2, i maiący za dzielnika s; wieloráz więc ſzeregu wyrazi ſię przez $\frac{1}{s}$

$$= p+qz+\frac{s'z^2}{s} = p+qz+\frac{a''z^2+b''z^3}{a+bz+cz^2};$$ przeto $\frac{s'}{s} =$

$\frac{a''+b''z}{a+bz+cz^2}$. To oſtatnie zrównanie pokazuie tén ſám przypádek któryśmy w ſzeregach *2go* porządku uwáżali, gdyż $\frac{s}{s'} = \frac{a+bz+cz^2}{a''+b''z}$. Tu wykonané znowu dzielenie wydá wieloráz $p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z}$; gdzie reſzta pozoſtałá będzie, ſzereg nieſkończony s'', rozdzielny przez z^2, i maiący za dzielnika s' tak dalece, że:

$$\frac{s}{s'} = p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z} = p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'};$$ a przeto

$$\frac{a'''}{a''+b''z} = \frac{s''}{s'};\ \frac{s'}{s''} = \frac{a''+b''z}{a'''} = p''+q''z.$$ co nás znowu uczy: że maiąc ſzereg podany, i przezeń rozdzieliwſzy iedność, otrzymámy naſámprzód wielo-ráz

$p+qz$,

$p+qz$, a za reſztę ſzereg nieſkończony s'; przez tę reſztę dzieląc znowu ſzereg s, otrzymámy wieloráz $p'+q'z$, a za reſztę ſzereg nieſkończony który wyrážám przez s'': przez tę oſtatnią reſztę, dzieląc reſztę poprzédzaiącą s', ieżeli trafię na wieloráz zupełny bez reſzty; ſzereg podany s będzie ſzeregiém zwrotnym trzeciégo porządku. A ponieważ - - $s=$

$$\frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2};\ \frac{s'}{s}=\frac{1}{p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'}};\ \frac{s''}{s'}=\frac{1}{p''+q''z}$$

będzie $s=\cfrac{1}{p+qz+\cfrac{z^2}{p'+q'z+\cfrac{z^2}{p''+q''z}}}$ co przerobiwſzy na ułomek poſpolity, otrzymámy ſummę ſzerégu podanégo, czyli ułomek rodzący ſzerég podany.

S trzech tych ſzczególnych przykładów mámy iuż prawo wnieść ſpoſób ogólny na rozeznanie ſzeregów zwrotnych, i na wynalezienie ułomków rodzących: tén ſpoſób z działáń poprzédzaiących wyciągniony i rozwięzuiący zadanie, zamyká ſię w takowém prawidle: ,,Maiąc ſobie podany ſzerég, dziel przez niégo iedność, poki nie otrzymaſz za wieloráz dwóch ,,terminów wzoru $p+qz$; ieżeli ſię zoſtała reſzta s', ,,dziel przez nię ſzerég podany s, poki nie wypadną ,,na wieloráz dwa terminy $p'+q'z$; ieżeli z drugiégo tego dzieleniá zoſtała reſzta s''; dziel przez nię ,,reſztę poprzédzaiącą s', poki za wieloráz nieotrzymaſz dwóch terminów wzoru $p''+q''z$: ieżeli ieſzcze zoſtanie ſię reſzta s'''; dziel przez nię reſztę ,,poprzédzaiącą s''; a tak ciągnąc daléy dzielenie reſzty poprzedzaiącéy, przez reſztę pozoſtałą z oſtatniégo dzieleniá, przyidzieſz koniecznie do wielorazu zupełnégo bez żádnéy reſzty, ieżeli ſzereg ieſt ,,zwrotny; tak dalece: że liczba dzieleniá będzie razém liczbą porządku do którégo ſzereg należy; i

„ieżeli ſzereg ieſt *n*go porządku; dzielenie ſkończy „ſię na *n*tym działaniu. Ieżeli zaś dzielenie takim „ſpoſobém odbywané nie przyprowadzi cię do wie„lorazu zupełnégo; ſzereg podany nie ieſt ſzeregiém „zwrotnym.„

Obiaśniymy to w przykładach:

Maiąc podany ſzereg liczb 1, 2, 3, 3, 7, 5, 15, 9, 31, 17, 63, 33, 127, 65, i t. d. ktorego prawo całe nam nieznané, wynaleśdź czyli ieſt zwrotnym lub nie? i ieżeli ieſt takim, odkryć iego ułomek rodzący?

Podané liczby układám podług wzoru ſzeregów z ilością nieznaną, to ieſt: $1+2z+3z^2+3z^3+7z^4+5z^5+15z^6+9z^7+31z^8+17z^9+63z^{10}+33z^{11}+127z^{12}+$ i t. d. (s); rozdzieliwſzy przezeń iedność, otrzymám $\frac{1}{s}=1-2z$; za reſztę zaś ſzereg $z^2+3z^3-z^4+9z^5-5z^6$ i t. d. który rozdzieliwſzy przez z^2, wypadnie

(s') - - - $1+3z-z^2+9z^3-5z^4+21z^5-13z^6+45z^7-29z^8+93z^9-$ i t. d. przez tén ſzereg dzieląc ſzereg podany, będzie $\frac{s}{s'}=1-z$, reſzta pozoſtała: $7z^2-7z^3+21z^4-21z^5$ i t.d. którą rozdzieliwſzy przez z^2, zoſtanie ſię ſzereg

(s'') - - - $7-7z+21z^2-21z^3+49z^4-49z^5+$ i t. d.

Przez tę reſztę dzieląc reſztę poprzedzaiącą s', otrzymám za wieloráz zupełny $\frac{s'}{s''}=\frac{1+4z}{7}$ bez żádnéy reſzty, co mi pokazuie, że ſzereg podany s, ieſt ſzeregiém zwrotnym 3go porządku, którégo ułomek - -

$$=\cfrac{1}{1-2z+\cfrac{z^2}{1-z+\cfrac{7z^2}{1+4z}}}\quad \text{- - - - - - } (a)$$

to ieſt: $\frac{1+3z+3z^2}{1-z-2z^2-2z^3}$ iako ſię pokáże niżéy.

Doſtrze-

Doſtrzegliśmy w teraźnieyſzém działaniu, że każdy zoſtaiący ſzereg, który má ſłużyć za dzielnika, ieſt rozdzielny przez z^2, co koniecznie wypádá z nátury działaniá. Przytrafić ſię atoli może, że ſzereg takowy będzie zamykáł w piérwſzym záráz terminie potęgę wyżſzą nád z^2, i na tén czás żeby nie wprowadzić wykładników odiemnych w wieloráz, możná cały ſzereg przez tę potęgę rozdzielić, która ſię w piérwſzym terminie pokáże, byleby tąkową potęgę położyc za z^2 w liczniku $\frac{1}{s'}$, $\frac{1}{s''}$ i t. d. n. p.

Niech będzie podany ſzereg liczb: 1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, i t. d. układám z niego ſzereg potęg:

$1+z+z^2+2z^3+4z^4+6z^5+7z^6+7z^7+7z^8+8z^9+$ i t.d. . . . (s):

dzieląc przezeń iedność, otrzymám za wieloráz

$\frac{1}{s}=1-z$, a za reſztę $-z^3-2z^4-2z^5-z^6$ ** $-z^9-2z^{10}$ i t. d, to ieſt:

(s') - - - $1+2z+2z^2-z^3$ ** $+z^6+2z^7+2z^8+z^9$ ** z^{12} i t.d. przez co dzieląc znowu ſzereg podany s, otrzymám za wieloráz $\frac{s}{s'}=1-z$; za reſztę zaś $z^2+3z^3+5z^4+6z^5+$ i t. d. $=s''z^2$, zaczéin:

(s'') - - - - $1+3z+5z^2+6z^3+6z^4+6z^5+7z^6+9z^7+11z^8+$ i t. d, przez tę znowu reſztę dzieląc reſztę poprzédzaiącą s', wypadnie $\frac{s'}{s''}=1-z$, bez żádnéy reſzty, co nám dowodzi, że ſzereg podany ieſt zwrotnym, ktorego ułomek wyráżá ſię przez - - - -

$$\cfrac{1}{1-z-\cfrac{z^3}{1-z+\cfrac{z^2}{1-z}}} \qquad - \quad - \quad - \quad (b).$$

ten przywiodłſzy do ułomku poſpolitégo,

litégo, znaydziém $s=\frac{1-2z+2z^2}{1-3z+4z^2-3z^3+z^4}$; przetó szereg podany iest czwártégo porządku, lubo trzy tylko zachodziły działaniá: co żebyśmy dokładniéy oznaczyli, niech n znaczy liczbę działań; p, q, r, i t. d. potęgi z w licznikach ułomków, czyli potęgi przez które dzielą się reszty s', s'', s''', i t. d. będzie szereg takowy, którégo reszty nie są statecznie rozdzielné przez z^2, ale przez potęgi p, q, r, i t. d; będzie mowię takowy szereg porządku $n+(p-2)+(q-2)+(r-2)+$ i t. d. o czém nás przykłady łatwo przekonaią.

§. XLII.

Opisanie ułomków ciągłych.

Sposób rozeznáwaniá szeregów zwrotnych zależący na ciągłém dzieleniu iednéy reszty przez drugą, odkrył nám nowy rodzáy ułomków iakiémi były (a), (b), gdzie każdy mianownik zamyka ilość całką złączoną z ilością łamaną. Takowé ułomki nazwano CIĄGŁEMI *(Fractiones continuae)*. Przez nie wyrażaią się zbiory czyli summy szeregów zwrotnych, tak dalece, że im szereg iaki iest wyższégo porządku, tém się iego summa w dłuższym ułomku ciągłym zawiérá; i ten ułomek ciągnie się bez końca, ieżeli szereg nie náleży do klassy szeregów zwrotnych. Nie możémy więc summy szeregów zwrotnych w ułomku pospolitym wyrazić, nié umiawszy sposobu przerábianiá ułomków ciągłych na pospolité. Sposob zaś tén lubo iest barzo prosty, iednakowóż dlá gruntownégo poznaniá nowégo tego rachunku, godná iest rzecz nászéy uwági wniśdź w ściśléyszé rostrząśnienie iego natury i właśności, które nam tu z porządku barzo związkowégo przypádá. Obrocémy więc uwagę naszę *naprzód* na poznanie rozległéyszé natury ułomków ciągłych: *powtóre* na sposób przerábiania ich na ułomki pospolité; *potrzecié* na wypádki stąd wynikaiącé i obiaśniaiącé nás o właśnościach ułomków ciągłych.

Co

Co do pierwszego: trafiliśmy na ułomki ciągłe, dzieląc reszty zostaiące iedne przez drugie; czyli chcąc to ogólniey wyrazić, szukaiąc náybliższych wártości całkich, tych funkcyi, których nie możemy wyrazić zupełnie. Zebyśmy więc rozleglćy obięli znaczenie i początek ułomków ciągłych, wystáwmy sobie funkcyą α, którey nie możemy w wyrazie całkim zawrzeć, ale do tego wyrazu możemy się co ráz barziey zbliżać. Te bliskie wártości znaczyć będziemy literami łacińskiemi a, b, c, d, e, i t. d. ich zaś reszty pozostałe zupełne wyrážać będą litery greckie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, i t.d. Ieżeli α iest funkcyą ułomkową, szukáymy wártości całkiey, która ią náybliżey wyráżá, i nazwieymy ią a zostanie się więc s tego dzieleniá reszta $(\alpha-a)<1$, chcąc znowu tey reszty mieć náybliższą wártość całką, muszę ią przerobić na wyráz większy od iedności. Ieżeli $(\alpha-a)<1$, będzie - - - $\frac{1}{\alpha-a}>1=\beta$, $\alpha=a+\frac{1}{\beta}$; ponieważ β iest większe od iedności, szukám náybliższego iey całkiego wyrazu, który nazywám b; s tego podziału zostanie się znowu reszta $(\beta-b)<1$, więc $\frac{1}{\beta-b}=\gamma>1$, a przeto $\beta=b+\frac{1}{\gamma}$; szukám znowu wártości całkiey náybliższey γ, i nazywám ią c; s tego dzieleniá zostanie się reszta $(\gamma-c)<1$, więc $\frac{1}{\gamma-c}=\delta>1$, a przeto $\gamma=c+\frac{1}{\delta}$; ponieważ ieszcze $\delta>1$, szukám náybliższey mu wártości całkiey, którą nazywám d; zostanie się reszta $(\delta-d)<1$, a zatem $\frac{1}{\delta-d}=\varepsilon>1$, $\delta=d+$

s kąd się rodzą

$\delta = d + \frac{1}{\varepsilon}$; ciągnąc tak daléy to dochodzenie, muszę koniecznie wyczerpać α, bo muszę koniecznie przyiśdź do náyprościeyszego wyrazu, którégo iuż daléy dzielić niepodobná, chyba że α nie iest funkcyą algebraiczną, albo że iest funkcyą algebraiczną niewymierną; i na tén czás działanie moié pociągnie się bez końca. Zbierzmyż teráz té wszystkié zbliżania wypádki.

$$\alpha = a + \frac{1}{\beta},\ \beta = b + \frac{1}{\gamma},\ \gamma = c + \frac{1}{\delta};\ \delta = d + \frac{1}{\varepsilon},\ \text{i t. d.}$$

$$\alpha = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\gamma}},\quad \text{czyli}\quad \alpha = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{i t. d.}}}}}$$

$$\alpha = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{\delta}}}$$

i t. d.

ich właśność co do znaków

Ponieważ według naszégo przypuszczeniá a, b, c, d, e, i t. d. są ilościami całkiémi náybliższémi ilości $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, i t. d. ilości zaś náybliższé są albo té, któré tuż poprzédzaią wártość práwdziwą, i są od niéy mniéyszé; albo té któré tuż idą po wártości práwdziwéy i są od niéy większé: ieżeli a, b, c, d, i t.d. są tuż poprzédzaiącémi i mniéyszémi od wártości práwdziwych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, i t. d. reszty pozostałe $\alpha - a$, $\beta - b$, $\gamma - c$ są dodatné. Ieże i zaś wártości bliskié a, b, c, d, i t.d. są większé od práwdziwych n.p. $a > \alpha$ reszta $\alpha - a$, a zatém $\frac{1}{\alpha - a} = \beta$ iest odiemną; ieżeli β iest odiemné, b musi bydź takiém; gdyż iest tego samégo rodzaiu ilością náybliższą β: b będąc odiemné, ieżeli iest znowu ilością większą od β; $\beta - b = \frac{1}{\gamma}$

będzie

będzie ilością dodatną, więc i c bydź musi dodatné: c będąc dodatné a razém nayblizsze γ, ieżeli $c>\gamma$; będzie $\gamma-c=\frac{1}{\delta}$ ilością odiemną; więc δ będzie odiemné, a zatém i d iego wártość całká náybliżſzá: δ, d, będąc odiemné, ieżeli $d>\delta$ będzie $\delta-d=\frac{1}{\varepsilon}$ ilością dodátną, zaczém e będzie dodatné; s kąd się pokazuie; że ieżeli za nayblizsze całkie wártości brać będziémy ilości mnieysze od prawdziwych; ułomek ciągły s tąd powstaiący cały będzie dodatny; ieżeli zaś za náybliższé wártości brać będziémy ilości większé od prawdziwych; ułomek ciągły będzie miał w swych terminach znaki dodatné z odiemnémi na przemián. Tymże samym sposobém rozumuiąc znáydziém, że ieżeli iednę ilość náybliższą weźmiémy większą od prawdziwéy, inné zaś po niéy następné weźmiém mnieysze; wszystkié terminy ułomku ciągłego po téy większéy bliskiéy wartości idącé będą odiemne. Chcąc té wszystkié rozumowaniá iaśniéy widzieć w przykładzie, przypuśćmy, że x iest ułomkiém pospolitym $\frac{A}{B}$, przypuściwszy i to że $A>B$ lubo to przypuszczenie nie iest kónieczné: dzieląc A przez B, otrzymámy za wieloráz a, za resztę C; zaczém $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}$, gdzie $C<B$ więc $\frac{B}{C}>1$: dzielę znowu B przez C, i otrzymám zá wieloráz cáłki b, za resztę zaś D; przeto $\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}$, gdzie $D<C$, a zatém $\frac{C}{D}>1$, któréy szukaiąc znowu bliskiey wártości cáłkiéy c, a resztę przewracaiąc, przerobię ią na ilość złożoną z cáłkiéy i ułomkowéy: takim sposobém

ciągnąc

ciągnąc dzielenie, przyidę do wyczérpaniá ułomku $\frac{A}{B}$, ile razy tén zamykać będzie funkcyą algebraiczną wymiérną; a ieżeli zostaiące ułomki przewracám za każdém działaniém, przewrácaiąc także wieloráz i robiąc go z cáłkiégo ułomkowym, nie narufzam nic wártości práwdziwéy $\frac{A}{B}$. Niech będzie $\frac{A}{B} = \frac{1103}{887}$, biorąc za wieloráz náybliżfzą wártość albo wfzyftkié liczby mniéyfzé, albo iednę większą, a inné mniéyfzé; otrzymámy

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}} \quad \text{albo} \quad \frac{1103}{887} = 2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{-9 + \text{i t. d.}}}}$$

§. XLIII.

Ułomki ciągłe przerábiáią się ná pofpolité.

Ponieważ w ułomku ciągłym każdy mianownik fkładá się z ilości cáłkiéy i łámanéy; fpofób przywiedzeniá go do ułomku pofpolitégo wypádá s práwideł arytmetyki: to iest zaczynać należy działanie od ostatniégo mianownika, i każdą ilość cáłką przywieśdź do mianownika danégo, którégo potém przeniosłfzy do licznika umniéyfzémy ułomek iednym mianownikiém: to czyniąc podobnie z dalfzémi ułomkami, za każdém działaniém zgubiemy iednégo mianownika poki do piérwfzégo przyfzedłfzy, nie przywiedziémy całégo ułomku ciagłégo do iednégo tylko mianowniká cáłkiégo. Zobáczmy to w rozebranym ná części ułomku ciągłym; i abyśmy nie ścieśnili o-

gólności

gólności prawideł, weźmiemy ieden ułomek ciągły maiący wſzędzie za licznika iedność, drugi maiący ilość iakąkolwiek.

$$\alpha = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{ i t. d.}}}}}$$

$$\frac{a}{1} \; \ldots \ldots = \frac{a}{1}$$

$$a + \cfrac{1}{b} \; \ldots \ldots = \frac{ab+1}{b}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} \; \ldots \ldots = \frac{abc+c+a}{bc+1}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} \; \ldots \ldots = \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}} = \frac{abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a}{bcde+de+be+bc+1}$$

$$\alpha = a + \cfrac{a'}{b + \cfrac{b'}{c + \cfrac{c'}{d + \cfrac{d'}{e + \text{ i t. d.}}}}}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{1}$$

$$a + \frac{a'}{b} = \frac{ab+a'}{b}$$

$$a + \frac{a'}{b + \frac{b'}{c}} = \frac{abc+ca'+b'a}{bc+b'}$$

$$a + \frac{a'}{b + \frac{b'}{c + \frac{c'}{d}}} = \frac{abcd+cda'+adb'+abc'+a'c'}{bcd+db'+bc'}$$

i t. d.

Zaſtanowiémy ſię náprzód nad ułomkiém ciągłym maiącym wſzędzie iedność za licznika, dlá tego że tén gatunek ieſt náyczęſtſzy w używaniu; powtóré że uwági nad nim mogą bydź podobnym ſpoſobém rosciągnioné do drugiégo. Znoſząc s ſobą té ułomki poſpolité, doſtrzeżémy w ich rodzaiu, że każdy licznik ułomku poſpolitégo ieſt funkcyą dwóch liczników poprzédzaiących, i każdy mianownik funkcyą także dwóch mianowników poprzédzaiących, to ieſt, rozmnożywſzy piérwſzégo poprzédzaiącégo licznika przez nową literę w ułomku ciągłym, i do téy mnogości dodáwſzy poprzédzaiącégo licznika, wypadnie licznik nowégo poſpolitégo ułomku: to ſamo prawo má miéyſce w mianowniku każdym, tak dalece, że wyſtawiwſzy ſobie przez $A, B, C, D, E, F,$ i t.d. ſzereg liczników powſtaiących z ułomków ciągłych co ráz dłuższych; mianowników zaś tychże poſpolitych ułomków przez A', B', C', D', E' i t. d. znáydziémy między niémi taki związek:

$$(k)\quad \begin{aligned} A &= a \\ B &= bA+1 \\ C &= cB+A \\ D &= dC+B \\ E &= eD+C \\ &\text{i t. d.} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A' &= 1 \\ B' &= b \\ C' &= cB'+A' \\ D' &= dC'+B' \\ E' &= eD'+C' \\ &\text{i t. d.} \end{aligned} \quad (l)$$

a, b,

$a, b, c, d, e,$ i t. d. będąc ilościami koniecznie całkiémi, mogą bydź dodatné lub odiémné, a dla nich niektóré terminy w zrównaniach poprzédzaiących będą takié. Ieżeli náſámprzód wſzyſtkié będą dodatné, dzieląc ié przez ſię, wypadnie:

na liczniki, na mianowniki,

$$(m)\quad \begin{aligned} \frac{B}{A} &= b + \frac{1}{A} \\ \frac{C}{B} &= c + \frac{A}{B} \\ \frac{D}{C} &= d + \frac{B}{C} \\ \frac{E}{D} &= e + \frac{C}{D} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{B'}{A'} &= b \\ \frac{C'}{B'} &= c + \frac{A'}{B'} \\ \frac{D'}{C'} &= d + \frac{B'}{C'} \\ \frac{E'}{D'} &= e + \frac{C'}{D'} \end{aligned} \quad (n)$$

i t. d. i t. d.

przypuściwſzy nawet że $a, b, c, d, e,$ i t. d. nie ſą większémi od iedności; zrównania teraźniéyſzé pokazuią, że każdy z ułomków $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C},$ i t. d. iako téż $\frac{B'}{A'}, \frac{C'}{B'}, \frac{D'}{C'},$ i t. d. ieſt większym od iedności: zaczém muſi bydź $B>A$, $C>B$, $D>C$, $E>D$, i t. d. podobnież $B'>A'$, $C'>B'$, $D'>C'$, $E'>D'$, i t. d. to ieſt że mianowniki równie iak liczniki poſtępuiąc co ráz barziéy roſną. Ieżeli zaś $a, b, c, d, e,$ i t. d. będą wſzyſtkié albo niektóré równé iedności, oprócz tego niektóré terminy w zrównaniach odiemné; n. p. $c=\pm 1$, ieżeli $\frac{A}{B}$ nie będzie tego ſamégo znaku z c, będzie $\frac{C}{B}<1$, a przeto $B>C$; na tén czás wzroſt liczników i mianowników będzie przerwany. Uważmy czyli w tym przypádku inné terminy naſtępuiącé będą roſły lub nie? Na ten koniec wróćmy ſię do

dáwnieyſzych zrównáń: ponieważ $\gamma = c + \frac{1}{\delta}$, $c = 1$, będzie $\gamma = 1 + \frac{1}{\delta}$, aże γ, δ, ſą koniecznie większémi od iedności, γ muſi mieć ieden znak z δ; więc c, d, iako naybliżſzé wártości γ, δ, muſzą mieć z niémi iedné znaki; będą przeto γ, δ, c, d, koniecznie tychże ſamych znaków. Powtóre $\frac{C}{B} = c + \frac{A}{B}$, gdzie $\frac{A}{B}$ różni ſię znakiém od c; ale że $\frac{A}{B} < 1$, będzie $c > \frac{A}{B}$, więc $\frac{C}{B}$ będzie tego ſamégo znaku co i c, będą więc koniecznie γ, δ, c, d, $\frac{C}{B}$, tychże ſamych znaków, a przeto mnogość $\frac{dC}{B}$ będzie koniecznie ilością dodatną: a ponieważ $\frac{D}{C} = d + \frac{B}{C}$, rozmnożywſzy całé to zrównanie przez $\frac{C}{B}$, wypadnie $\frac{D}{B} = \frac{dC}{B} + 1$; przeto $\frac{D}{B} > 1$, a zatém $D > B$, co nám oczywiście dowodzi, że chociaż w poſtępie terminów A, B, C, D, i t.d. iako też A', B', C', D', i t. d. który ſtanie ſię mnieyſzym od poprzédzaiącégo, drugi po nim idący znowu zacznie wzráſtáć; wnieśmy więc, że ſzereg liczników i mianowników w ułomkach poſpolitych idzie wzráſtaiąc, i że to prawo wzroſtu przerwané w którym terminie, wróci ſię znowu w terminach naſtępuiących.

§. XLIV.

§. XLIV.

Z ułomków pospolitych wyciągaią się własności ułomków ciągłych.

Rostrząsnąwszy z osobna liczników i mianowników, złożmy ie teráz razém na ułomki pospolite, s których każdy wyraża wártość ułomku ciągłego odpowiadaiącégo mu. Té ułomki pospolite pociągną się rzędém:

$(p)\quad \frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}$ i t. d. tak dalece że im dalszy będzie takowy ułomek, tém się barziéy zbliży do wártości prawdziwéy owéy funkcyi, ktorąśmy na ułomek ciągły rozebrali; i ostatni taki $\frac{V}{V'}$ będzie równy ze wszystkiém funkcyi wspomnionéy. Co właśnie z natury rzeczy wypływa; bo ieżeli ułomek ciągły tém lepiéy wyraża swą rodzącą funkcyą, im się daléy rosciąga, a skończywszy się, iest iéy zupełnie równy; tak ułomki pospolite $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$ i t. d. wyrażaiące tém dłuższy ułomek ciągły im są dalszé, barziéy się do funkcyi rodzącéy zbliżaią, im są odległéysze; aże ostatni z nich ogarniá cały ułomek ciągły, ogarniá także całą funkcyą taki ułomek rodzącą.

Biorąc po dwá przyległé ułomki z rzędu (p) i dzieląc ieden przez drugi, wypadną zachodzącé między niémi stósunki: $\frac{BA'}{AB'}$; $\frac{B'C}{BC'}$, $\frac{C'D}{CD'}$, $\frac{D'E}{DE'}$ i t. d. których wártość wyciągnioná z zrównań (m), (n), §.43, to iest: $\frac{A'}{B'} \times \frac{B}{A} = \frac{A'}{B'}\left(b + \frac{1}{A}\right) = \frac{A'}{B'A} + 1$, kładąc za b wártość z (n); zaczém $A'B - AB' = 1$, podobnie w innych $\frac{B'C}{BC'}$, $\frac{C'D}{CD'}$ i t. d. kładąc za $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, wártość z (m); zaś za b, c, d, e, i t. d. wártość z (n); przyidziémy do nastę̨puiących zrównań.

$$(q) \quad \begin{aligned} &BA'-AB'=1.\\ &CB'-BC'=-1.\\ &DC'-CD'=1.\\ &ED'-DE'=-1.\\ &\text{i t. d.}\end{aligned}$$

Zrównaniá té uczą nás, że ułomki (p) ſą przywiedzioné do náyproſcieyſzégo wyrazu; gdyby bowiem miały iakich mnożników ſpólnych licznikowi i mianownikowi; té pokázałyby ſię były w zrównaniach (q) wypádaiących z ich ſtóſunku. Te zrównaniá (q) wydaią s ſiebie inné:

$$(r). \quad \begin{aligned} &\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'}\\ &\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=-\frac{1}{B'C'}\\ &\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}=\frac{1}{D'C'}\\ &\frac{E}{E'}-\frac{D}{D'}=-\frac{1}{E'D'}\\ &\text{i t. d.}\end{aligned}$$

które ſtawiaią nám przed oczy naſtępuiącé prawdy: *Naprzód* z §. 43 wiémy, że A', B', C', D', E', i t. d. poſtępuiąc roſną; więc i mnogości $A'B'$, $B'C'$, $D'C'$, i t. d. a zatém różnice między ułomkami przyległémi (p) tém barziéy maleią, im té ułomki ſą odlegléyſzé: ułomki więc rzędu (p) przyſtępuią co ráz barziéy do práwdziwych i ściſłych wártości. *Powtóre* to przyſtępowanie tak ieſt bliſkie, iż nad nié nie można naznaczyć bliżſzégo w tak proſtym wyrazie; ponieważ między dwoma takiémi ułomkami żádén inny nie może srzodkowáć, chyba z mianownikiém większym od którégo s tuż przyległych. Pozwólmy bowiem że między ułomkami przyległémi $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$ ſrzodkuie inny $\frac{m}{n}$ z mianownikiém n mniéyſzym od

C',

C', albo D', ich więc różnica $\frac{nC-mC'}{nC'}$ bydźby powinna mnieyſzą od $\frac{1}{D'C'}$; pierwſzá nie może bydź mnieyſzą od $\frac{1}{nC'}$; więc ieżeli $n<D'$, $\frac{1}{nC'}>\frac{1}{C'D'}$, zaczém ułomek $\frac{m}{n}$ nie tak ſię zbliżá do wártości práwdziwéy iak którykolwiek z rzędu (p). Gdyby zaś śrzodkuiący ułomek był z mianownikiém większym od D' albo C', iego wártość barziéyby ſię oddálała od wártości práwdziwéy niżeli wártość którégokolwiek z ułomków (p); różnica bowiem między - - - $\frac{C}{C'}-\frac{m}{n}$ byłaby większą od różnicy $\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}$; a przeto między dwoma przyległémi ułomkami różnica znayduie ſię náymnieyſzá, ktorykolwiek s takowych ułomków wyrážá wártość tak bliſką práwdziwéy, iż żáden inny ułomek wyrazić iey bliżéy nie może, chybaby w wyrazie zawikléyſzym.

Uważmy teráz iak daleko idzie to zbliżenie. Ponieważ $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, i t. d. oznáczaią práwdziwé pozoſtałé reſzty; zaś a, b, c, d, e, i t. d. reſzty bliſkié tamtych, używaiąc zrównáń, (k), (l), będą wártości práwdziwé na α.

$$\alpha=A+\frac{1}{\beta}=\frac{A\beta+1}{A'\beta}=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'\beta};$$

$$(s)\quad \alpha=\frac{B\gamma+A}{B'\gamma+A'}=\frac{B}{B'}-\frac{1}{B'(B'\gamma+A')},$$

$$\alpha=\frac{C\delta+B}{C'\delta+B'}=\frac{C}{C'}+\frac{1}{C'[C'\delta+B']},$$

$$\alpha=\frac{D\varepsilon+C}{D'\varepsilon+C'}=\frac{D}{D'}-\frac{1}{D'(D'\varepsilon+C')}.$$

i t. d.

té wártości práwdziwé pokazuią nám zaráz rożnice od wártości bliſkich zamkniętych w ułomkach (p), s którychto różnic ſądzić możémy iak daleko oddalámy ſię od práwdy, biorąc $\frac{C}{C'}$ na miéyſce wártości práwdziwéy. Błąd naſz wytknięty ieſt w ułomku - - $\frac{1}{C'(C'\delta+B')}$ wyrážaiącym rożnicę między $\frac{C}{C'}$ i $\frac{C\delta+B}{C'\delta+B'}$; chcąc tén błąd ocenić, uwážmy że δ ma za wártość bliſką d, od któréy różni ſię ułomkiém mniéyſzym od iedności, wártości więc δ zawarté ſą między d i $d\pm 1$, znak wyżſzy náleży ſię kiedy $d<\delta$; niżſzy zaś kiedy $d>\delta$ więc i mianownik różnicy zawarty ieſt między $C'd+B'$, i $C'(d\pm 1)+B'$ czyli między D' i $D'\pm C'$, to ieſt: przypuściwſzy że $\delta>d$, a biorąc za wár- wártość α, $\frac{C}{C'}$; popełniámy błąd mniéſzy od $\frac{1}{D'C'}$ ale większy od $\frac{1}{D'(D'+C')}$, tymże ſamym ſpoſobém uwážaiąc wártości β, γ, ε i t. d. zamknięté między granicami b, $b+1$; c, $c+1$; e, $e+1$; przez podobné rozumowaniá znáydziém, że biorąc za α ułomki $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$, i t. d. popełniámy błąd mniéyſzy od $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{D'E'}$ i t. d. ale większy od $\frac{1}{A'(B'+A')}$, $\frac{1}{B'(C'+B')}$ i t. d. s kąd ſię pokazuie naprzód iak błąd naſz ieſt mały, i iak tén zmniéyſzá ſię co ráz barziéy biorąc odległéyſzé ułomki z rzędu (p).

Potrzecié zapatrzywſzy ſię na zrównaniá (r), widzémy że różnice brané między dwoma przyległémi ułomkami rzędu (p) ſą na przemián dodatné i odié-

mné;

mné, różnice znowu między wártościami prawdziwémi i bliſkiémi zamknięte w zrównaniach (s) ſą także na przemián dodátné i odiemné; co nám pokazuie, że ułomki rzędu (p), dzielą ſię na większe i mnieyſzé od wártości práwdziwéy: mnieyſzé ſą $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$ i t. d. większé zaś ſą $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, i t. d. przeto wártość práwdziwá iakiéykolwiek funkcyi (α) rozebranéy na ułomki ciągłé zawartá ieſt między dwoma przyległémi ułomkami poſpolitémi (p); na które ſię przerabiaią ułomki ciągłé. Zeby więc nie ſtracić téy oſtatniéy korzyści, ſtarać ſię potrzeba, aby ułomki poſpolite (p) były wſzyſtkié dodatné, to ieſt aby ułomki ciągłé były takiémi; a co na iedno wychodzi; aby za wártość bliſką nie brać większéy od práwdziwéy ale zawſze mnieyſzą.

Obróćmy teráz uwagę naſzę na dwa té podziáły ułomków rzędu (p), któreśmy dopiéro doſtrzegli. Ułomki mnieyſzé i większé od wártości práwdziwéy ſą:

mnieyſzé $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$, i t.d. większe: $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, i t. d.

chcąc miéć różnicę między dwoma przyległémi, wyciągniémy ią z zrównáń (r) dodaiąc dwa razém do ſiebie, i kładąc za $C'—A'$, cB' z zrównáń (l); znáydziém

$$\frac{C}{C'}-\frac{A}{A'}=\frac{c}{A'C'}$$

$$\frac{E}{E'}-\frac{C}{C'}=\frac{e}{E'C'} \text{ i t. d.}$$

ieżeli a, b, c, d, i t. d. ſą iednościami; łatwo nám dowieśdź tak iak przedtém, iż różnica między takiémi dwoma ułomkami ieſt náymnieyſzá; iże między niémi nie może żádén inny śrzodkowáć z mianownikiém mnieyſzym n. p. od C' albo od A'; ale ieżeli

 $a, b,$

a, *b*, *c*, *d*, i t. d. ſą liczbami więkſzémi od iedności, na tén czás między każdé dwa przyległé ułomki tylé można śrzodkuiących włożyć, ilé $a-1$, $b-1$, $c-1$, $d-1$, $e-1$, i t. d. zamykaią iedności. Pozwólmy że n. p. $c=4$; będzie podług zrównań (l), (k), $C'=4B'+A'$, $C=4B+A$; a przeto między $\frac{C}{C'}$, $\frac{A}{A'}$ można będzie włożyć $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, $\frac{3B+A}{3B'+A'}$; gdzie widzémy, że mianowniki tych śrzodkuiących ułomków czynią poſtęp arytmetyczny od A' aż do C'. Różnice między dwoma przyległémi.

$$\frac{A+B}{A'+B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'(A'+B')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'}-\frac{A+B}{A'+B'}=\frac{1}{(A'+B')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'}-\frac{2B+A}{2B'+A'}=\frac{1}{(3B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'}-\frac{3B+A}{3B'+A'}=\frac{1}{C'(3B'+A')}$$

ponieważ wſzyſtkié té różnice ſą dodátné, znakiém ieſt, że ułomki arytmetycznie poſtępuiąc roſną, co właśnie s ſamych pokazuie ſię mianowników. Aże z drugiéy ſtrony iedności ſą wſzędzie licznikami; ułomki té ſą náyprościéyſzé tak dalecé, iż teraz między dwoma témi przyległémi żádén inny nie może śrzodkować z mianownikiém mniéyſzym od którégokolwiek z dwóch przyległych. Tę ſamę właſność znáydziémy w ułomkach więkſzych od wártości práwdziwéy.

S tych wſzyſtkich práwd wnoſi ſię oczywiście, że ułomki ciągłé ſą náyzdatniéyſzym rachunkiém do zbliżeniá nás do práwdziwych wártości tych funkcyi, których nie możémy w wyrazach cáłkich ogarnąć, i że na takié ułomki przerobić możémy wſzyſtkié inné, iako to poſpolité, dzieſiątkowé i t. d.

Wróćmy

Wróćmy się ieſzcze do zrównań (r); ponieważ $\frac{B}{B'}$ $=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'B'}$; $\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}+\frac{1}{B'C'}$, $\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}-\frac{1}{D'C'}$; $\frac{D}{D'}$ $=\frac{E}{E'}+\frac{1}{D'E'}$ i t. d. kładąc iedne wártości za drugie, wypadnie:

$$\frac{C}{C'}=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{B'C'}$$

$$\frac{D}{D'}=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{B'C'}+\frac{1}{D'C'}$$

$$\frac{E}{E'}=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{B'C'}+\frac{1}{D'C'}-\frac{1}{D'E'}$$

nazwáwſzy oſtatni ułomek z rzędu p $\frac{V}{V'}$; $\frac{V}{V'}-\frac{A}{A'}=x$; będzie $x=\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{B'C'}+\frac{1}{D'C'}-\frac{1}{D'E'}+\frac{1}{E'F'}-\frac{1}{F'G'}$ $+$ i t. d.

Każdy więc ułomek z rzędu (p) wyrazić ſię może przez ułomek pierwſzy i przez różnice wſzyſtkich śrzodkuiących; te różnice ciągną ſię ſzeregiem poſpolitym odmieniaiącym w terminach znaki na wzáiem, przeto każdy ułomek ciągły może ſię zamienić na ſzereg poſpolity, w którego terminach znaki idą na przemián. Przyſzliśmy więc do ſpoſobu wrácaiącego nás od ułomków ciągłych do ſzeregów; zoſtaie nám teráz ieſzcze do rozwiązaniá zadanie; żeby s każdego iakiegokolwiek ſzeregu byle odmieniaiącego w terminach znaki na wzaiem, zrobić ułomek ciągły. Nim przyſtąpiemy do tego zadaniá rosciągaiącego ſię na szeregi iakiegokolwiek rodzaiu, muſzemy ſię oświecić o początku tych ſzeregów które nie ſą zwrotnemi.

§. XLV.

Tłómaczy ſię nowy rodzáy ſzeregów.

Iużeśmy w §. 23. pierwſzéy Części trafili byli na ſzeregi rodzące ſię s funkcyi niewymiérnych iakiégokolwiek wykładnika dodátnégo lub odiemnégo, całkiégo lub ułomkowégo, gdzieśmy widzieli że na rozbiór tych wſzyſtkich wzór *Newtona* - - - - - $(P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$, powſzechnie ſłuży. W nim powinniśmy byli doſtrzéc, że także ieden termin wyrazić ſię może przez poprzédzaiącé podług liczby terminów w funkcyą niewymiérną wchodzących. W rozbiorze takowym funkcyi pokazuie ſię barzo wielé práwd podobnych do tych, którémy w ſzeregach zwrotnych uwáżali; ale że dowód ich ściſły i-ogólny ſłużący do poparciá wypádków ſamégo rachunku ieſzcze nie ieſt w mocy naſzéy nauki; więc ażebyśmy nie przeſtali na wierze tam gdzie náymocnieyſzé przekonanie powinno przodkować; albo, żebyśmy obiaśnień rachunku nie brali za dowody; zoſtawiémy ſobie té wiadomości do wyżſzych świateł. Nie możémy ſię iednak w tém mieyſcu uwolnić od tych ſzeregów, które nám będą mogły wielé pomóc w drugim Tomie teraźnieyſzégo dzieła, a które my przynáymniey po większey części będziém mogli z nabytych iuż początków wyciągnąć. Takiémi ſą ſzeregi wypádaiącé z rozwiązaniá zrównáń nieoznaczonych wyżſzych ſtopni: n. p. Maiąc zrównanie 4go ſtopnia: $ay^3-x^3y-ax^3=0$, i chcąc y wyrazić przez x, nie możémy tego tylko przez ſzeregi dokazać. Ale nowá trudność która nám ſię tu pokazuie, zależy na tém, iż w tym nowym ſżeregu nie widzémy cale wzoru, podług którégo ułożyć ſię powinny terminy, a zatém potrzeba razém pracować nad wynalázkiém wſpół-czynnika i wykładnika w każdym terminie. *Newton* podáł na to ſpoſób znany Geometrom pod imieniem RÓWNOLEGŁOBOKU NEWTONA (*Paralellogrammum Nevtonianum*), nad którégo uproſzczeniém pracowali niektórzy, zaniedbawſzy nań

dowodu

dowodu gruntownego który Newton opuścił; niektórzy szukali go usilnie ale z małą pomyślnością. Zácny Geometra Francuzki J.P. *Cousin* Akademik i Professor Królewski w Paryżu, podał inny sposób rozwięzuiący to zadanie; który my wolémy tu krótko wyłożyć, niż zawikłany Newtona równoległobok bez dowodu przytáczać, odsyłaiąc czytelnika do dzieł Newtona Matematycznych (*Opuscula Mathematica*), albo do Kśiążki *Cramera: Introduction á l' analyse des lignes Courbes*, gdzie ieſt dosyć iaśnie wyłożony.

Teorya J.P. *Cousin* do rozbierania funkcyi lub zrównania na szeregi.

Ponieważ w szeregach o iakich tu mówiémy, náleży nám współ-czynniki razém i wykładniki wynaleśdź, wprowadzémy na obydwa ilosci nieoznaczoné: i tak maiąc zrównanie - - $ay^3 - x^3y - ax^3 = o$ (a') a chcą y wyrazić przez x; x będzie ilością porządkową w szeregu: czynię więc

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{ i t. d.} \quad (b')$$

$$ay^3 = aA^3x^{3m} + 3aA^2(Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \text{ i t. d.})\,x^{2m}$$
$$+ 3Aa(Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \text{ i t. d.})^2x^{2m}$$
$$+ a(Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{ i t. d.})^3$$
$$yx^3 = Ax^{m+3} + Bx^{m+n+3} + Cx^{m+2n+3} + \text{ i t. d.}$$

Zrównanie (a') pokazuie nám, że y ieſt pewną funkcyą x wyrażoną przez związek w tem zrównaniu zawarty, funkcyą zaś x niezawisłego od żádnéy szczególnéy wártości: przypuściwszy że ta wártość y, oznaczá się dobrze przez zrównanie (b'), włożywszy ią w zrównanie (a') powinna ié przywieśdź do zero tak, żeby żádnéy szczególnéy wártości nie wprowadzić na x, a zatém żádnégo związku między terminami: więc zrównanie (a') włożywszy w nie za y wártość z (b'), ſtaie się tosamém (*Aequatio identica*) a zatém każdégo w niém terminu współ-czynnik bydź powinién zero.

Wykonáwszy wszyſtkié wyżéy naznaczoné działaniá, i kładąc każdy termin pod przyzwoitą sobie potęgą x, potrzeba nám bydź troskliwémi, aby żádnégo terminu w dálszym ciągu nie opuścić, któryby do

téy

téy saméy potęgi x należał; maiąc zaś początkowych terminów dobrze oznaczoné wykładniki, poznámy łatwo wzór szeregu: poznámy także współ-czynniki czyniąc każdy termin szeregu równy zero: ale iakże potrafiémy wykładniki oznaczyć? Na to wypadnie nám sposób z następuiącéy uwági: Ponieważ w zrównaniu przerobionem zachodzą terminy, w których x má za wykładnika pewną oznaczoną liczbę; podkładaiąc terminy s takowémi wykładnikami pod którekolwiek terminy początkowé z wykładnikami nieoznaczonémi, i równaiąc wykładniki nieoznaczoné z wiadomémi, otrzymámy s tego porównania wártości na m, n; rostrząsnąwszy potém czyli oznaczoné wártości na m, n, dobrze się w dalszych terminach nadaią, to iest: czyli albo nowéy nie wciągną wártości na m, n, przeciwnéy wprzód wynalezionéy; albo w porządném następstwie utrzymuią dalsze terminy; to znalázłszy wszystko, pewni iesteśmy że terminy były dobrze podłożoné, i wártości na m, n, dobrze oznaczoné: gdyby zaś iaká w dalszym ciągu pokázała się nieprzyzwoitość, potrzeba to pokładanie odmiéniać póty; póki nie trafiémy na wártości i szereg od wszelkiéy nieprzyzwoitości wolny. A ponieważ to podkładanie terminów z wykładnikami znanémi zawisło od naszégo upodobaniá, ieżeli się przytrafi, że to podkładanie kilka razy odmiénioné żádnéy nieprzyzwoitości nie wprowadzi w wypádkach; otrzymámy kilka szeregów, s których każdy dá wártość na y, stósowną do związku w zrównaniu (a') zawartégo: co właśnie z naturą zrównań dobrze się zgádzá; zrównanię bowiem (a') będąc czwártego stopnia mieć powinno cztéry piérwiástki, którym odpowiadać powinny cztéry różné szeregi na y, wynikaiącé s czterech ułożéń terminów znanych pod nieznanémi. Pamiętáymy na té wszystkié uwági w następuiącym rachunku: Piérwszy układ terminów z zrównaniá przerobionégo iest:

$$aA^3x^{3m}$$

$$\left.\begin{array}{l} aA^3x^{3m}+3aA^2Bx^{3m+n}+3aAB^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +3aA^2C \\ -ax^3 - Ax^{m+3} \quad -Bx^{m+n+3} \end{array}\right\} x^{3m+2n} \quad - \; - \; -$$

$$\left.\begin{array}{l} +3aA^2D \\ +6aABC \\ +\;aB^3 \end{array}\right\} x^{3m+3n} \left.\begin{array}{l} +3aA^2E \\ +3aB^2C \\ +3aAC^2 \\ +6aABC \end{array}\right\} x^{3m+4n} \quad \text{i t. d.} = 0.$$
$$-Cx^{m+2n+3} \qquad -Dx^{m+3n+3}$$

równaiąc wykładników $3m=3$, $m=1$, $3m+n=m+3$, s kąd $n=1$; co się barzo dobrze z dalszym postępem terminów zgádzá: czyniąc teráz każdego współ-czynnika zero, wypádá: $aA^3-a=0$, $A=1$, $3aA^2B-A=0$, czyli $B=\frac{1}{3a}$, to samo daléy czyniąc znaydziém $C=0$, $D=-\frac{1}{81a^3}$, $E=\frac{1}{243a^4}$, i t. d. przeto

$$y=x+\frac{x^2}{3a}+0-\frac{x^4}{81a^3}+\frac{x^5}{243a^4}+\text{ i t. d.} \quad - \; - \quad (b'')$$

Drugi ráz układaiąc wypadnie:

$$\left.\begin{array}{l} aA^3x^{3m}+3aA^2Bx^{3m+n}+3aAB^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +3aA^2C \\ -Ax^{m+3}-Bx^{m+n+3} - Cx^{m+2n+3} \\ \quad -\; ax^3 \end{array}\right\} x^{3m+2n} \quad - \; -$$

$$\left.\begin{array}{l} +3aA^2D \\ +6aABC \\ +\;a\;B^3 \end{array}\right\} x^{3m+3n} \left.\begin{array}{l} +3aA^2E \\ +3aB^2C \\ +3aAC^2 \\ +6aABC \end{array}\right\} x^{3m+4n} \quad \text{i t. d.} = 0.$$
$$-Dx^{m+3n+3} \qquad -Ex^{m+4n+3}$$

$3m=m+3$ s kąd $m=\frac{3}{2}$, $3m+n=m+n+3=3$, $n=-\frac{3}{2}$,

$A^3a-A=0$; $A=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$, $3aA^2B-B-a=0$, $B=\frac{1}{2}a$,

$C=\mp\frac{3a^3}{8\sqrt{a}}$, $D=\frac{1}{2}a^4$, $E=\mp\frac{51a^6}{128\sqrt{a}}$, i t. d.

a ponieważ

a ponieważ A, C, E, i inné na przemián terminy mają dwie wártości do dwóch znaków przywiązane; powftaną z nich dwa fzeregi:

$$y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} - \tfrac{51}{128}a^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}} + \text{i t. d.} \qquad (c')$$

$$y = -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} + \tfrac{51}{128}a^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}} + \text{i t.d.} \qquad (d')$$

Trzeci iefzcze układ fzeregu ieft ten:

$$Ax^{m+3} + Bx^{m+n+3} + Cx^{m+2n+3} + Dx^{m+3n+3} \;\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ax^3 - A^3ax^{3m} - 3aA^2Bx^{3m+n} \left.\begin{matrix} -3aA^2C \\ -3aAB^2 \end{matrix}\right\} x^{3m+2n}$$
$$+Ex^{m+4n+3}$$
$$\left.\begin{matrix} -3aA^2D \\ -6aABC \\ -\;\;aB^3 \end{matrix}\right\} x^{3m+3n} \qquad \text{i t. d.} = 0.$$

$m+3=3$, s kąd $m=0$ $m+n+3=0$, $n=-3$, wfpółczynniki zaś $A=-a$, $B=-a^4$, $C=-3a^7$, $D=-12a^{10}$, $E=-55a^{13}$; zaczém czwártá wártość na y.

$$y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \frac{55a^{13}}{x^{12}} - \text{i t.d.} \qquad (e')$$

S czterech więc wynalezionych wártości na y (b''), (c'), (d'), (e'), podług różnych okoliczności zadaniá lub wártości x, wybrać możná fzereg naybarziéy maleiący. Iedén tén przykład wyftarczy fpodziéwám fię na obiaśnienie téy o fzeregach nauki. W wyżfzych Matématyki częściach będziem mieli fpofobność pomówić o niéy obfzerniéy.

Wyłożoné dotąd fpofoby powinny nás oświecić o różnych gatunkach fzeregów, na które fię rozbierać mogą funkcye lub zrównaniá nie mogące bydź albo dokładnie rozwiązané, albo w całkiéy wártości wyrażoné zupełnie, co wfzyftko ieft przedmiotem Teoryi zbliżaniá *(Approximatio)*, czaftki nayważniéyfzéy i náypotrzebniéyfzéy do rozwiązaniá więkfzéy liczby pytań Fizycznych. Wróćmy fię teráz do ułomków ciągłych.

§. XLVI.

§. XLVI.

Przerabiaią się szeregi na ułomki ciągłe.

Przebieglismy różne gatunki szeregów, i sposoby przerobienia na nie różnych funkcyi i zrównań, a to tym końcem, abyśmy z rozległeyszą wiadomością funkcyi, mogli ogólniey poznać ułomki ciągłe, którycheśmy tak pożyteczne wytknęli własności. Ostatnia z nich nauczyła nas, że nie tylko szeregi zwrotne, ale nawet inne iakiegokolwiek rodzaiu, byleby w terminach znaki odmieniały na wzaiem, mogą się na ułomki ciągłe przerobić. Żebyśmy ten sposób mogli iaśniey i powszechniey stawić przed oczy, weźmy ułomek ciągły nayogólnieyszy:

$$a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d+\cfrac{d'}{e+\cfrac{e'}{f+\text{ i t. d.}}}}}}$$

przerabiaiąc go częściami na ułomki pospolite tak, iak w §. 42; wyciągniemy związek między ich licznikami i mianownikami podobnie iak w §. 43.

$$(k')\quad\begin{aligned}A&=a\\B&=bA+a'\\C&=cB+b'A\\D&=dC+c'B\\E&=eD+d'C\\&\text{i t. d.}\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}A'&=1\\B'&=b\\C'&=cB'+b'A'\\D'&=dC'+c'B'\\E'&=eD'+d'C'\\&\text{i t. d.}\end{aligned}\quad(l')$$

s tych zaś

$$(q')\quad\begin{aligned}BA'-AB'&=a'\\CB'-BC'&=-a'b'\\DC'-CD'&=a'b'c'\\ED'-DE'&=-a'b'c'd'\\&\text{i t. d.}\end{aligned}\qquad(r')\quad\begin{aligned}\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}&=\frac{a'}{A'B'}\\\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}&=\frac{a'b'}{B'C'}\\\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}&=\frac{a'b'c'}{D'C'}\\&\text{i t. d.}\end{aligned}$$

uczyniwszy podług §. 44. $\frac{V}{V'} - \frac{A}{A'} = x$, będzie

$$x = \frac{a'}{A'B'} - \frac{a'b'}{B'C'} + \frac{a'b'c'}{C'D'} - \frac{a'b'c'd'}{D'E'} + \text{i t. d.} \quad (a'')$$

maiąc teraz podany ſzereg iakikolwiek odmieniaiący w terminach znaki na wzaiem

$$x = P - Q + R - S + T - V + \text{i t. d.} \; - \; - \; - \; (b'')$$

i chcąc go przerobić na ułomek ciągły, równam każdy iego termin s terminem ſzeregu (a''), wypadnie

$$P = \frac{a'}{A'B'},\; Q = \frac{a'b'}{B'C'},\; R = \frac{a'b'c'}{C'D'},\; S = \frac{a'b'c'd'}{D'C'} \text{ i t.d.} \, (c'')$$

te oſtatnie zrównania ſłużyć mi powinny na oznaczenie a', b', c', d', i t.d. w funkcyach P, Q, R, S, i t. d. s których dopiero wypaśdź maią przyzwoite wartości na a, b, c, d, i t. d. także w funkcyach P, Q, R, S, i t. d. do ułożenia ułomku ciągłego s ſzeregu (b''). Ale wynayduiąc pomienione wartości ſtarać ſię mamy, aby A', B', C', D', i t. d. w nich ſię nie znaydowały: i dla tego pracować należy nad przerobieniem zrównań (c'') na inne, w którychby A', B', C', D', i t. d. odpadły, co nam pokazuie przyczynę naſtępuiącego rachunku J.P. *Eulera*.

Naprzód ponieważ $A'=1$, mamy $a'=PB'$.

$\frac{Q}{P} = b'\frac{A'}{C'}$ - - - $b' = \frac{Q}{P}.\frac{C'}{A'}$

$\frac{R}{Q} = c'\frac{B'}{D'}$ - - $c' = \frac{R}{Q}.\frac{D'}{B'}$

$\frac{S}{R} = d'.\frac{C'}{E'}$ - - - $d' = \frac{S}{R}.\frac{E'}{C'}$

$\frac{T}{S} = e'.\frac{D'}{F'}$ - - - $e' = \frac{T}{S}.\frac{F'}{D'}$

$$P - Q = \frac{a'(C' - b'A')}{B'C'} = \frac{a'c}{C'} = \frac{PB'c}{C'}$$

$Q - R =$

$$Q-R=\frac{a'b'A'(D'-c'B')}{B'C'D'}=\frac{a'b'A'd}{B'D'}=\frac{QC'd}{D'}$$

$$R-S=\frac{a'b'c'A'(E'-d'C')}{C'D'E'}=\frac{a'b'c'A'e}{E'C'}=\frac{RD'e}{E'}$$

$$S-T=\frac{a'b'c'd'A'(F'-e'D')}{D'E'F'}=\frac{a'b'c'd'A'f}{D'F'}=\frac{SE'f}{F'}$$

i t. d.

s tych zrównań w ostatnim porządku wypádaią inne:

$$(P-Q)(Q-R)=PQcd.\ \frac{B'}{D'}\ \text{więc}\ \frac{D'}{B'}=\frac{PQcd}{(P-Q)(Q-R)}$$

$$(Q-R)(R-S)=QRed.\ \frac{C'}{E'}\ \text{- -}\ \frac{E'}{C'}=\frac{QRde}{(Q-R)(R-S)}$$

$$(R-S)(S-T)=RSfe.\ \frac{D'}{F'}\ \text{- -}\ \frac{F'}{D'}=\frac{RSef}{(R-S)(S-T)}$$

i t. d.

tych ostatnich ułomków wártości włożywszy w $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$ i t. d. nie zapominaiąc że podług zrównań (l'), $B'=b$, $D'=\frac{Pbc}{P-Q}$, otrzymámy:

$$a'=Pb \qquad d'=\frac{SQde}{(Q-R)(R-S)}$$

$$b'=\frac{Qbc}{P-Q}$$

$$c'=\frac{RPcd}{(P-Q)(Q-R)} \qquad e'=\frac{TRef}{(R-S)(S-T)}$$

a ponieważ podług pierwszych naszych przypuszczeń wyciągnionych z natury samych ułomków a', b', c', d', i t. d. powinny bydź ilościami całkiemi, więc na ocalenie tey kondycyi, wypádáią konieczne wártości na a, b, c, d, i t. d.

$b=1$ - - - - $a'=P$ Przeto ułomek ciągły równy
$c=P-Q$ - - $b'=Q$ ſzeregowi (b''), ieſt:
$d=Q-R$ - - $c'=RP$
$e=R-S$ - - $d'=SQ$
$f=S-T$ - - $e'=RT$
i t. d. i t. d.

$$x=\cfrac{P}{1+\cfrac{Q}{P-Q+\cfrac{RP}{Q-R+\cfrac{QS}{R-S+\cfrac{RT}{S-T+\text{i t. d.}}}}}} \qquad (b''')$$

gdybyśmy nie byli wciągnieni potrzebą naznaczenia takowych wártości na a, b, c, d, e, i t. d. które nám z natury teraźnieyſzego rachunku wypadły, ſzereg (b'') i iému równy ułomek ciągły (b''') mogłyby nám były ſłużyć za wzór do przerabiania innych iakichkolwiek ſzeregów na ułomki ciągłe. Muſzémy dla tego na każdy gatunek ſzeregu podobny rachunek powtárzać i z niego przyiśdź do ułomku ciagłégo.

Maiąc n.p. ſzereg złożony z ułomków.

$$x=\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}-\frac{1}{S}+\frac{1}{T}-\text{i t. d.} \qquad (e'')$$

działaiąc tak iak w poprzedzaiącym; znaydziémy

$$a'=\frac{b}{P} \text{ - - - - - } b=P \text{ - - - } a'=1$$

$$b'=\frac{Pbc}{Q-P} \text{ - - - - } c=Q-P \quad b'=P^2$$

$$c'=\frac{Q^2cd}{(Q-P)(R-Q)} \text{ - - } d=R-Q \quad c'=Q^2$$

$$d'=\frac{R^2de}{(R-Q)(S-R)} \text{ - - } e=S-R \quad d'=R^2$$
$$\text{- - } f=T-S \quad e'=S^2$$

$x=$

$$x=\cfrac{1}{P+\cfrac{P^2}{Q-P+\cfrac{Q^2}{R-Q+\cfrac{R^2}{S-R+\cfrac{S^2}{T-S+\text{ i t. d.}}}}}} \qquad (e''').$$

Niech będzie szereg nieskończony

$$(f'') \qquad x=\frac{1}{P}-\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PQR}-\frac{1}{PQRS}+\text{ i t. d.}$$

wypadnie nám przez podobny rachunek:

$a'=\frac{b}{P}$ - - - - - - $b=P$ - - - - - $a'=1$

$b'=\frac{bc}{Q-1}$ - - - - - - $c=Q-1$ - - - - $b'=P$

$d=R-1$ - - - $c'=Q$

$c'=\frac{Qcd}{(Q-1)(R-1)}$ - - $e=S-1$ - - - $d'=R$

$d'=\frac{Rde}{(R-1)(S-1)}$ - - $f=T-1$ - - - $e'=S$

i t. d.

$$x=\cfrac{1}{P+\cfrac{P}{Q-1+\cfrac{Q}{R-1+\cfrac{R}{S-1+\cfrac{S}{T-1+\text{ i t. d.}}}}}}$$

maiąc nakoniec szereg geometryczny

$x=P-Qz+Rz^2-Sz^3+Tz^4-$ i t. d. $\qquad (g'')$.

znáydziem:

$a'=Pb$ - - - - - $b=1$ - - - - - $a'=P$

$b'=\frac{Qbcz}{P-Qz}$ - - - - $c=P-Qz$ - - - $b'=Qz$

$$c' = \frac{PRcdz}{(P-Qz)(Q-Rz)} \qquad d = Q-Rz \qquad c' = PRz$$

$$d' = \frac{QSdez}{(Q-Rz)(R-Sz)} \qquad \begin{matrix} e = R-Sz \\ f = S-Tz \end{matrix} \qquad \begin{matrix} d' = QSz \\ e' = TRz \end{matrix}$$

i t. d. i t. d. i t. d.

$$x = \cfrac{P}{1 + \cfrac{Qz}{P-Qz + \cfrac{PRz}{Q-Rz + \cfrac{QSz}{R-Sz + \cfrac{RTz}{S-Tz + \text{ i t. d.}}}}}}$$

przerábianie innych ieſzcze geometrycznych ſzeregów znaleśdź można w J.P. Eulerze *Introductio in Analyſim infinitorum T.I.p. 309.* i dalé'y. Náleżałoby nám tu ieſzcze wyłożyć dalſzé ſzeregów ciągłych właſności, któré odkrył W. Geometra J.P. *de la Grange* i podał w Pamiętnikach Akademii Berlińſkiey i Paryzkiey ſtóſuiąc ié do różnych matematycznych i fizycznych pytáń, ale że té rozległością ſwoią zoſtawiłyby nám mało czaſu i miéyſca na teorye ieſzcze zamiarowi naſzému iſtotné. Możémy iednak każdégo czytelnika pilnégo i zaiętégo chęcią przeniknieniá w głębſzé matematyczné nauki upewnić, że wyłożoné przez nás ważniéyſzé, i trudniéyſzé początki dobrze ogarnąwſzy, potrafi ſám przez ſię opuſzczonych wiadomości z łatwością dopełnić w dziełach wielkich Geometrów, do których zrózumiéniá iak przedſięwzięta od nás prácá ieſt nieuchronnie potrzebná, doſyć nám o tę ſpráwiedliwość odwołać ſię do każdégo doświádczeniá.

§. XLVII.

Zebráwſzy té tak związané s ſobą ściśle oſtatnié wiadomości, poymiémy łatwo, że celém teraźniéyſzégo rozdziáłu było ſummowanie ſzeregów któré nás wciągło w wiadomości inné s ſobą związkowé. Potrafiliśmy wſzyſtkich ſzeregów zwrotnych wynaleśdź

ſummy,

summy, ale ieszcze daléy iesteśmy od ogólnégo sposobu zbiérania szeregów innégo rodzaiu. W wyższych Matematyki częściach materya ta zatrudni nas barzo obszernie, gdzie i tak po náygłębszych uwágách i dociekaniach przestaniémy na rozwiązaniu pewnych tylko szczególnych przypádków. Nieszczęście! że poznáwanie náyważnieyszych skutków w naturze przywodzi nás do szeregów nieskończonych, których nie umieiąc powszechnie summować, muszémy przestać na zbliżaniu się do práwdy. Doskonałość zaiste fizyki zawisła w większéy części od doskonałości naszych o szeregach świateł, co iest przyczyną, iż náypiérwsi talentém ludzie s tak upornym zápałém rzucaią się w té tak zawikłané i pracowité ale barzo ważné dociekaniá. Skończmy iuż wiadomości tego rozdziáłu iedną uwágą: rozbiéraiąc funkcye ułomkowé w piérwszym rozdziale téy części na szeregi nieskończoné, trafiliśmy na postępy arytmetyczné i geometryczné: s tych piérwszé zależą na iednéy statecznéy różnicy, drugié na iednym statecznym wielorazie czyli stósunku dwóch terminów przyległych. Zostaie nám wyłożyć w swych związkach to wszystko cokolwiek się ściągá do rachunku dwóch tych náyczęstszych w używaniu szeregów. Postęp arytmetyczny wzrástaiący wyrážá się ogólnie:

Summowanie postępów arytmetycznych i geometrycznych prowadzi nás do nowégo rodzaiu zrównáń i funkcyi.

$$\div\ a.\ a+b.\ a+2b.\ a+3b.\ a+4b.\ a+5b.\ a+6b.\ \text{i t. d.}$$

przypuściwszy że $a+6b$ iest terminém ostatnim; widzémy że tén równy iest terminowi piérwszému powiększonému różnicą b tylé razy powtórzoną, ilé iest poprzédzaiących go terminów; a zatém nazwáwszy liczbę terminów całégo szeregu x, termin piérwszy a, ostatni n, rożnicę b; będzie:

$$u=a+(x-1)b \quad - \ - \ - \quad (A)$$

oprócz tego dodáwszy ostatni termin do piérwszégo, wypadnie taká summa, iaką rodzi dodanie dwóch którychkolwiek terminów równo oddalonych od skraynych: summa więc całégo szeregu równá się summie dwóch skraynych tylé razy powtórzonéy, ilé

 liczba

liczba terminów rozdzieloná przez dwa má w sobie iedności: czyli nazwáwszy summę s

$$s=(a+u)\frac{x}{2} \quad - - - - \quad (B)$$

za pomocą dwóch zrównáń (A), (B), s pięciu rzeczy a, u, x, b, s, maiąc trzy znané, wynáydziémy to wszystko, cokolwiek do postępu arytmetycznégo náleży. Wszystkié té rzeczy nad to są łatwé abyśmy się ich kombinacyą i obiaśnieniém przez przykłady bawili.

Postęp znowu geometryczny wzrástaiący tak się ogólnie wyráżá:

$$\div\ a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.\ aq^6.\ \text{i t. d.} \quad (\alpha)$$
$$a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.\ \text{i t. d.} \quad (\beta)$$

Ostatni termin postępu geometrycznégo (α) widzémy że się równá piérwszému rozmnożonému przez stósunek q wyniesiony do potęgi, któréy wykładnik oznácza liczbę terminów całego szeregu zmnieyszoną iednością, czyli, nazwáwszy ostatni u, piérwszy a, liczbę terminow x,

$$u=aq^{x-1} \quad (C).$$

Ieżeli przéz szereg (β), wyrazić chcémy postęp geometryczny (α), będą zrównaniá $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$, $f=eq$, i t. d.

zaczém - - - $b+c+d+e+f=(a+b+c+d+e)q$.

w téy summie widzémy że piérwszému członkowi zrównaniá brakuie piérwszégo terminu, a drugiému członkowi ostatniégo, to iest: $s-a=(s-u)q$, s kąd

$$s=\frac{uq-a}{q-1},\ \text{czyli}\ s=\frac{aq^x-a}{q-1} \quad - - - - \quad (D).$$

z dwóch zrównáń (C), (D), będziém mogli s, a, u, q, wynaleśdź za pomocą prawideł wyłożonych w I. Części na zrównaniá; lecz chcąc wynaleśdź liczbę terminów x, té prawidła wcale nám nie posłużą. Owoż nowy cale dlá nás rodzáy rachunku! gdzie ilość niewiadomá iest wykładnikiém funkcyi znanéy. W

całym

całym dotąd ciągu naſzéy nauki nie uważaliśmy w wykładnikach tylko ilości znané, lub liczby; teráz pokázało ſię iż zadaniá różné mogą nás przyprowadzić do zrównaniá, gdzie ilość nieznana będzie wykładnikiém funkcyi iakiéy: co nám otwiérá pole do nowych doſtrzeżeń w naſtępuiącym rozdziále.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Funkcye wykładniczé odkrywaią nám piérwſzy rodzáy funkcyi przeſtępnych, czyli Logarytmy; których ſię tłómaczą właſności, użycié, ſpoſób rozbiéraniá ich na ſzeregi, i rachowaniá z nich Tablic Logarytmów.

§. XLVIII.

Uwági nad wykładnikami od iemnémi prowadzą nás do poznaniá Logarytmów.

Wykładniki znané w iakiéykolwiek ilości lub funkcyi były zawſze ſkazówkami potęg we wſzyſtkich dotąd naſzych uwágach, wſzakże wprowadzoné ſą dlá ſkróceniá wyrazów funkcyi wypádaiącéy z mnożeniá iéy ſaméy przez ſię. Té wykładniki ſtaiąc ſię ilościami odmiennémi lub nieznanémi, nie mogą tracić ſwéy iſtótnéy właſności. Wyſtawiwſzy ſobie funkcyą a^x; ta funkcyá będzie koniecznie odmienną; wſzyſtkié iéy odmiany zawiſły od odmián x; możémy więc tę funkcyą wyrazić przez inną odmienną y, to ieſt $a^x = y$. A ponieważ wártości y zawiſły od wártości x, i wzaiemnie wártości x, od wártości y, a będąc zawſze ſtatecznem; y ſtaie ſię funkcyą x, i wzáiemnie x funkcyą y. Nie zapomináymy bowiem o téy przeſtrodze, że kiedy ilość odmienną wyrážámy przez drugą odmienną, całą wártość takiégo wyrazu ſzacuiémy z ilości odmiennych, a ilości ſtateczné, iaką ieſt a, nie wchodzą na tén czás w naſzę uwágę dlá tego że w rozumowaniach naſzych báczyć

powinniśmy na wszystkie odmiany funkcyi i ich stósunki, w któré, ilości stateczné bynaymniéy nie wpływaią.

Ieżeli x iest ilością odmiénną i razém wykładnikiém czyli skazówką potęg, x przechodzić może przez wszystkié, któré się tylko wymyslić mogą wártości znané, a przeto y przechodzić także będzie przez wszystkié mogącé się pomyślić potęgi a, to iest przez całkié lub ułomkowé, dodátné lub odiemné. Ieżeli x przeydzie przez liczby następuiącé po sobie w porządku naturalnym $0, 1, 2, 3, 4, 5$, i t.d. czyli przez postęp arytmetyczny; y przeydzie przez wszystkié porządkiém idącé potęgi a; a^0, a, a^2, a^3, a^4, a^5, i t.d. czyli przez postęp geometryczny; będzie więc postępowi arytmetycznému x, odpowiadać y w postępie geometrycznym. Aże wiémy z Arytmetyki że ułożywszy dwa postępy liczb odpowiadaiącé sobie, iedén arytmetyczny, a geometryczny drugi, piérwszy nazywá się Logarytmém drugiégo; będzié więc x *Logarytmém* y: co wyrážać odtąd będziémy $l. y$, i zrównanie $a^x = y$ będzie zrównaniém logarytmicznėm, w którém to, co iest funkcyą y, nazywá się logarytmém, to iest $x = l. y$. W nauce więc logarytmów trzy rzeczy zachodzą do uwážániá, ilość stateczná a którá ráz obraná iest tą samą we wszystkich wártościach x, i dlá tego nazywá się GRUNTEM LOGARYTMÓW (*Basis Logarithmorum*), powtóré wártości różné na x, iako wykładniki potęg rachunkowych w gruncie a, któré nazwaliśmy logarytmami; nakoniec różné wártości y przywiązané do gruntu a ráz obranégo, któré się zowią UKŁADEM LOGARYTMÓW (*Systema Logarithmorum*).

W układzie Logarytmów obráwszy liczbę pewną za grunt, wszystko zawisło od wártości różnych na x, biorąc $x = 0$, wypadnie $y = 1$, czyli $0 = l. y$; w iakimkolwiek więc układzie, logarytm iedności iest zero; ieżeli za x będą brané liczby całkié dodatné lub odiemné; w piérwszym przypádku y będzie wyrážać

różné

różne potęgi przez liczby wzráſtaiące $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$, i t. d. w drugim zaś przypádku przez liczby ubywaiące $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}$, i t. d. przeto wſzyſtkich liczb całkich zámkniętych między dwiéma granicami $0, \infty$, Logarytmy ſą dodátné; które tém barziéy roſną, im liczba ieſt znaczniéyſzá: wſzyſtkich zaś ułomków zawartych między $-\infty$, i 0, Logarytmy ſą odiemné; które tém ſię ſtaią więkſzé, im liczba barziéy ubywá, tak dalece że $l.0 = -\infty$. Przypuściwſzy wártości ułomkowé dodátné lub odiemné na x, n.p. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ i t.d, y ſtanie ſię $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{2}{3}}$, i t. d. czyli $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a^2}$ i t. d: aże cechy piérwiáſtkowé maią wielorakié znaczeniá; każdy takowy wyráz na y i cały układ logarytmów náleżáłby do kilku wártości, przez co byłby wątpliwym, co ſię także pokazuie w ułomkach odiemnych na x. Przyſtawiaiąc zaś za x wártości niewymiérné, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{n}$, i t. d. y byłoby równé potędze wykładnika niewymiérnégo, którey nie mogąc naznaczyć zupełnie, nie wiedzielibyśmy nawet wyrazu takiéy funkcyi.

Idźmy iuż do uważaniá różnych wártości na grunt a: wziąwſzy $a=1$ za x zaś iakiékolwiek bądź liczby, wſzyſtkié wártości p i cały układ logarytmów zamiéniá ſię na iedność: obráwſzy zaś za a liczbę więkſzą od iedności ale odiemną, $a^x = y$ dá wártości dodatné na y, kiedy x będzie liczbą cáłką párzyſtą; kiedy zaś x będzie liczbą cáłką niepárzyſtą, wártości na y będą odiemné, układ więc takowy logarytmów zamykáłby razém liczby dodatné i odiemné. Ieżeli zaś za x w tymże ſamym przypádku kłaśdź będziémy ułomki dodatné lub odiemné, wártości na y częścią będą rzetelné a częścią uroioné. S tych wſzyſtkich uwág zaſadzonych na właſnościach funkcyi wykładniczych i zrównaniu $a^x = y$, pokazuie ſię oczywiście, że do wygodnégo i rzetelnégo układu logarytmów grunt a bydź powinién koniecznie liczbą

dodatną większą od iedności; wartości zaś na x bydź powinny wymierne. Wziąwszy n.p. $a=10$. wypadnie nam układ

Liczby - - - 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. i t. d.
Logarytmy 0. 1. 2. 3. 4. 5. i t. d.

tak dalece: że wszystkich liczb, które są zupełnemi potęgami gruntu 10. logarytmy są całkie zamykaiące $n-1$ iedności, gdzie n znaczy liczbę figur wchodzących w potęgę 10. Wszystkich zaś liczb, które nie są potęgami gruntu, logarytmy bydź nie mogą ani całkie ani wymierne; ale wszystkich liczb środkuiących między 1 i 10, logarytmy będą zawarte między 0 i 1, to iest będą >0, ale <1; wszystkich zaś środkuiących między 10, i 100, logarytmy będą większe od iedności, ale mnieysze od 2; wszystkich środkuiących między 100 i 1000, będą większe od 2, ale mnieysze od 3. i t. d. Będą więc takowych liczb logarytmy zamykać figury całkie i łamane. Pierwsze oznaczaią mieysce dwóch przyległych potęg gruntu, między któremi liczba podana środkuie, i nazywaią się CECHAMI (*Characteristicae*). Ponieważ cechy logarytmów wypadaią zaraz z liczby figur wchodzących w liczbę podaną; pisanie ich w tablicach logarytmów iest wcale niepotrzebne, ile że to przywięzuie logarytm do iedney tylko liczby, który bydź może do barzo wielu liczb rościągniony odmieniaiąc cechę.

Chociaż logarytmy niezupełnych potęg gruntu, nie mogą bydź dokładnie ani wymiernie naznaczone, nie idzie iednak zatem że są niewymierne: pozwólmy bowiem że b wyraża liczbę całką wymierną nie będącą potęgą gruntu a, gdyby iey logarytm był niewymierny, szłoby zatem że $l.b=\sqrt{n}$, a przeto $b=a^{\sqrt{n}}$, co iest przeciwko pierwszemu przypuszczeniu. Wnieśmy więc że logarytmy liczb które nie są potęgami gruntu, a które my odtąd nazywać będziemy *środkuiącemi*, ani są wymierne ani niewymierne, to iest, nie należą do żadnego podziału funkcyi alge-

algebraicznych; i dla tego logarytmy są funkcyami prawdziwie PRZESTĘPNEMI.

Roftrząśnijmy teraz wszyftkie działania zachodzące w logarytmach. Niech będą dwie liczby iakiekolwiek y, u, których logarytmy są x, z, w tymże samym gruncie a; będzie $a^x=y$, $a^z=u$; mnożąc te zrównania przez się, wypada: $a^{x+z}=yu$, przeto $x+z=l.yu$: logarytm więc mnogości równy ieft fummie logarytmów wszyftkich mnożników. Dzieląc zaś te same dwa zrównania otrzymamy $a^{x-z}=\frac{y}{u}$, zaczem $x-z=l.\frac{y}{u}$ to ieft: logarytm wielorazu ieft równy różnicy logarytmów ilości podzielney i dzielącey: to oftatnie prawidło służy na wszyftkie ułomki.

Rozwięzuią się zrównania przeftępne za pomocą logarytmów.

Ieżeli $a^x=y$ będzie $a^{nx}=y^n$, a przeto $nx=l.y^n$, a ponieważ $x=l.y$ więc $nx=n.l.y=l.y^n$: kiedy n ieft liczbą całką wzór $n.l.y=l.y^n$, służy na wynoszenie do potęg funkcyi za pomocą logarytmów, to ieft: że logarytm iakieykolwiek potęgi równy ieft logarytmowi samey ilości rozmnożonemu przez wykładnika potęgi: kiedy zaś n ieft liczbą łamaną wzór $n.l.y=l.y^n$, służy na wyciąganie pierwiaftków. Niech będzie n. p. $n=\frac{1}{3}$, będzie $\frac{1}{3}l.y=l.\sqrt[3]{y}$; to ieft: że logarytm iakiegokolwiek pierwiaftku ieft równy logarytmowi ilości rozdzielonemu przez wykładnika pierwiaftku. Działaiąc więc w liczbach przez logarytmy mnożenie zamienia się na dodawanie, dzielenie na odciąganie, wynoszenie do potęg na mnożenie, a wyciąganie pierwiaftków na dzielenie profte, co niezmiernie ułatwia naypracowitsze arytmetyczne działania.

We wszyftkich tych kombinacyach rozwięzuiąc zrównanie $a^x=y$ czyli $x=l.y$ opuściliśmy $l.a=1$. pisząc $x=l.y$, zamiaft $xl.a=l.y$; ponieważ rachowaliśmy zawsze w gruncie a; gdybyśmy atoli rachowali

w gruncie innym, $l.a$ nie byłby iednością, a przeto nie mógłby bydź opuszczony. Po tych uwagach rozwiążémy barzo łatwo zrównanie (D) zostawioné na końcu poprzédzaiącégo rozdziału $s=\frac{aq^x-a}{q-1}$, czyli $\frac{s(q-1)+a}{a}=q^x$, a przéto $x.log.q=l.\frac{s(q-1)+a}{a}$ $=l.(sq-s+a)-l.a$, - - - $x=\frac{log.(sq-s+a)-l.a}{log.q}$ widzémy więc że takowy sposób rozwiązania zrównań nie podobny iest cále do tego, któryśmy w piérwszéy części podali, i dlá tego działanie to nazywá się przestępném, tak iako funkcyá w zrównanie wchodząca a zawisła od logarytmów, má imię funkcyi przestępnéy. Użycie więc logarytmów iest barzo rozległé nie tylko do ułatwienia działań arytmetycznych w liczbach, ale téż i do rozwiązania takowych zrównań, gdzie ilość nieznaná wchodzi za wykładnika. Z niego wypływá nieuchronná potrzeba táblic logarytmicznych na wszystkié liczby, ktoré s całym tym rachunkiém były nieznané aż do czasow *Nepera*. Tén w Roku 1614 odkrył go Geometrom w dziele: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*, i ułożył táblice logarytmów na cały rachunek trygonometryczny. Układ iego má za grunt liczbę 2, 71828 i t. d. który potém poznáwszy nie ze wszystkiém wygodny, przerobił na inny, gruntu 10. Pracuiąc nad doskonaleniém i rosciągnieniém nowéy tey teoryi w śrzód powszechnéy sławy umarł Roku 1618, i Synowi dopiéro iego dostało się wyiawić tén nowo przerobiony układ w dziele: *Appendix de Logarithmorum praestantiori usu*. Winniśmy gorliwéy prácy Henryka *Briggs* Professora Geométryi w Oxford rosciągnienie rachunku logarytmicznégo do liczb naturalnych. Godny tén wdzięczności Matematyk po przeczytaném piérwszém dziele Nepera udał się do niego, a obiąwszy dobrze wyłożoné sobie grunta téy teoryi i za-

Historyá tego wynalázku.

myśły

myśly wynalázcy, iął się z niespracowaną ciérpliwością téy prácy, wyrachowáł logarytmy liczb naturalnych w gruncie 10. i wydáł ie w Londynie Roku 1624. pod tytułem *Arithmetica Logarithmica*, które dzis powszechnie używane, maią imie Logarytmów Briggiuszowych (*Logarithmi Briggiani*). W dziéle dopiéro wspomnioném znáydziém logarytmy liczb od *1.* do *20.000* i od *90.000* aż do *101.000*; w wstępie zaś cálą teoryą tego rachunku wyłożoną. Rospoczął także Briggs podług tego układu rachowáć logarytmy linii trygonometrycznych, ale w ciągu tego dzieła umárł, które po nim *Henryk Gellibrand* Astronomii w Londynie Professor dokończywszy, wydáł w Xiążce *Trigonometria Britannica* Roku 1630. Na koniec R. 1633 *Adrián Ulacq* Niderlandczyk zostawioną przez Briggs szparę w logarytmach liczb naturalnych zapełnił i táblice trigonometryczné z większą dlá użyciá wygodą przez dziesiątki wtóré (*minuta secunda*) postępuiąc, ułożył w dziéle *Trigonometria Artificialis*.

Neper wyciągnął sposób rachowaniá logarytmów z uwági nad biegiém przyspieszonym i iednostaynym. Myśl ta spólná *Newtonowi* w innym rodzaiu rachunku a daleká od naszych początków nie może náleżyć do teraźniéyszégo zámiaru. Każdy za pomocą Mechaniki potrafi ią zrozumiéć w samych originalnych pismach Nepera, i cokolwiek do historyi tego wynalázku należy, wyczytá w Xiążkach dopiéro wyliczonych, które chociaż bárzo rzádkie znayduią się w Bibliotece Szkoły głównéy tutéyszéy. Wszystkie té dzieła będą zawsze szacowną dlá potomności pamiątką tak nadzwyczaynéy prácy i ciérpliwości iakiéy w owych czasach rachunek logarytmów wyciągał.

§. XLIX.

Kiedy Algebra rosciągła swoié pomocy po wszystkich matematycznych częściach, zaczęli myśléć Geometrowie o użyciu iéy do rachowaniá logarytmów liczb śrzodkuiących. Aże té logarytmy sposobém

tylko

Rozbiéraią się logarytmy i funkcye wykładnicze na szeregi.

tylko bliskim mogą się wyrazić, szukali Geometrowie tego rachunku w szeregach nieskończonych iako iedynym instrumencie w takim przypadku. Szeregi atoli nieskończone iakośmy widzieli wynikaią tylko z rozbioru funkcyi ułomkowych albo niewymiernych; logarytmy zaś liczb śrzodkuiących nie należąc do żadney tey klassy funkcyi Algebraicznych nie mogły podpadać pod takie szeregi iakieśmy uważali. Tá trudność powinna była wstrzymać wszystkie usiłowania Geometrów, ale geniusz barziey się nią zapálá niż zráżá; a taiemnica póty cięży na iego spokoyności, póki iey prawdzie nie wydrze. Takim pokázáł się właśnie J. P. *Euler* który nową cale drogą przyszedł do sposobu wyrażenia logarytmów i wszystkich funkcyi wykładniczych przez szeregi nieskończone. Zabáwmy się nad tak piękną geometryczną sztuką którą żebyśmy w iak nayiaśnieyszym postawili widoku, zbliżmy do siebie świéżo dostrzeżone logarytmów właśności.

Ponieważ $a^x = y$ uczy nás, że odmieniaiąc a przy tey samey wártości na x, tworzemy różne układy logarytmów; odmieniaiąc zaś x przy wártości stateczney na a wyciągámy logarytmy różnych liczb w tymże samym układzie; ieżeliśmy przywykli do práwdziwie geometrycznych uwág, powinniśmy się zaráz zapytać o stósunek zachodzić mogący między logarytmami pewney liczby n, branemi w różnych układach, i między logarytmami liczb w tymże samym układzie. Na ten koniec wystáwmy sobie dwa grunta a, e; a wziąwszy liczbę iakąkolwiek n przypuśćmy że iey logarytm w gruncie a iest p, w gruncie zaś e iest q; wypadną nám dwa zrównania $a^p = n$, $e^q = n$; przeto $a^p = e^q$ $p.\log.a = q.\log.e$ - - - - $\frac{p}{q} = \frac{\log.e}{\log.a}$: to ostatnie zrównanie uczy nás że stósunek zachodzący między logarytmami dwóch układów iest cale nie zawisły od liczby, ponieważ n wypadło z zrównania; ale ten stósunek cálkiem zawisł

od

od gruntów. Równaiąc więc logarytm iakiéykolwiek bądź liczby wzięty w iednym układzie, z logarytmém téyże saméy liczby wziętym w drugim układzie, wypadnie nám pewién stósunek zachodzący między logarytmami dwóch tych układów; tén stósunek poniéważ się nie odmiénia z odmianą liczb ale z odmianą gruntów, idzie zatém, że w każdym układzie iest liczba wchodząca w skład każdégo logarytmu, która całkiém zawisłą będąc od gruntu, rozróżnia iedén układ od drugiégo tak, że za odmianą téy liczby odmienia się grunt, i za odmianą gruntu odmiénia się ta liczba wyrażaiąca stósunek logarytmów w iednym układzie do logarytmów drugiégo układu.

To dobrze zrozumiawszy uważmy, że sposób wyrażenia logarytmów przez szeregi nieskończoné zawisł od przerobienia $a^x=y$ na funkcyą dwó lub kilko-wyrazową niewymiérną iakiégokolwiek wykładnika. Upatruymy tego sposobu w odmianach x, poniéważ od tych, wartości y zawisły. Uczyniwszy $x=o$, mámy $y=1$ we wszystkich powszechnie układach; więc ieżeli wykładnik $x=o$ powiększy się liczbą f nieskończenie się mało różniącą od zero; y powiększy się także liczbą w nieskończenie się mało różnicą od iedności; to iest będzie $a^f=1+w$; aże $a^o=1$ należało do wszystkich układów, w zrównaniu $a^f=1+w$, w będzie funkcyą f, ale w swéy wielkości zawiśnie od gruntu a: będzie więc w zamykać w sobie f i razém liczbę zawisłą od gruntu, wyrażaiącą stósunek logarytmów w iednym układzie do logarytmów drugiégo układu; nazwiymy taką liczbę k, poniéważ k wymierza wartość w podług wartości gruntu a, będzie $w=kf$, a zatém $a^f=1+kf$ - - - $a^{fg}=(1+kf)^g$, potrafiliśmy więc y rozebrać na funkcyą dwó-wyrazową i wyniéść do potęgi g; trzeba nám teráz wynaleśdź związek między k, i a, oprócz tego chcąc funkcyą a^{fg} rosciągnąć na wszystkié liczby skończoné, potrzebaby g nadodź taką wartość, któraby rozmnożona przez f dała liczbę skończoną, co

łatwo otrzymać, bo ieżeli $gf=x$, będzie $g=\frac{1}{f}\frac{x}{}$, a ponieważ f podług 1go przypuszczenia iest liczbą nieskończenie małą, g będzie koniecznie liczbą nieskończenie wielką; mnogość zaś z dwóch takowych liczb wypada skończona. Tym sposobem J. P. *Euler* uważaiąc każdą liczbę skończoną iako mnogość z nieskończenie małey przez nieskończenie wielką, przyszedł do przerobienia logarytmu na wyraz wykładniczy dwó-wyrazowy, ten zaś na szeregi nieskończone. Patrzmy na ciąg tego rachunku i iego wypadki. Ponieważ $a^{fg}=(1+fk)^g=1+gkf+\frac{g(g-1)}{1.\,2}$ $k^2f^2+\frac{g(g-1)(g-2)}{1.\,2.\,3}k^3f^3+\frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.\,2.\,3.\,4}k^4f^4$ i t. d. g będąc liczbą nieskończenie wielką, wszystkie wartości skończone przed nią nikną: można więc za $g-1$, $g-2$, $g-3$, i t. d. wziąść g; oprócz tego $f=\frac{x}{g}$ kładąc zaś te wartości w szereg dopiero rozebrany, odmieniémy go na $a^x=(1+\frac{kx}{g})^g=1+kx+$

$$\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\frac{k^4x^4}{1.2.3.4}+\text{i t. d.} \quad - - - - \quad (A).$$

to zrównanie daie nam wyraz funkcyi wykładniczéy przez szereg nieskończony, ale funkcyi takiéy, gdzie ilość stateczna iest gruntem logarytmów; chcąc więc wyrazić przez szereg nieskończony funkcyą b^z tak, żeby b nie brać za grunt, znaleśdź nam trzeba związek między b^z i między a^x. Na ten koniec uczyńmy $b=a^n$, $b^z=a^{nz}$, $n=log.b$ w gruncie a; kładąc w zrównanie (A) $x=nz$, $n=l.b$ otrzymamy:

$$b^z=1+\frac{kz}{1}log.b+\frac{k^2z^2}{1.2}(log.b)^2+\frac{k^3z^3}{1.2.3}(log.b)^3+\text{i t. d.} \quad (B)$$

Zrównanie (B) wyraża funkcyą wykładniczą przez szereg tak, że ani k, ani $log.b.$ nie należą do gruntu b, ale

b, ale do gruntu *a*. Położywszy teráz w zrównaniu (*A*) $x=1$, otrzymámy:

$$a=1+k+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+\frac{k^5}{1.2.3.4.5}+ \text{i t. d.} \quad (C).$$

Ostatnie to zrównanie daie nám związek między *k* i *a*, i uczy nás, że grunt *a* zawist całkiem od *k*, i iest ową liczbą stósunkową wypádáiącą z porównaniá logarytmów dwoiakiego układu, i zawistą całkiem od gruntu, iakośmy na początku tego §. dostrzegli. Maiąc więc takową liczbę każdemu układowi szczególną, wynáydziemy grunt tém bliższy prawdy, im szereg (*C*) będzie barziey maleiący, to iest im *k* będzie mnieyszé. Potrzebaby nám ieszcze *k* wyrazić przez *a*, czego nie łatwo dokázać z szeregami. Sposób pospolity w Algebrze na tén przypádek nazywá się Powrót Szeregów (*Retour des Suites*): żeby go tu można użyć potrzeba náprzód przypuścić że szereg (*C*) iest maleiącym, to iest że *k* iest liczbą barzo małą: ieżeli tak iest, w zrównaniu:

$$a-1=k+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4} \text{ i t. d.}$$

uczyniwszy $a-1=z$, możemy wziąść $z=k$; a chcąc mieć *k* wyrażone dokładniey przez *z*, zmyślmy sobie że iest dane przez szereg:

$$k=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+ \text{ i t. d.}$$

a biorąc tę wártość za *k* w drugim członku zrównaniá (*C*) przywiedzionego do zero; znáydziem:

$$k = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ i t. d.}$$

$$\frac{k^2}{1.2} = \frac{1}{1.2}A^2z^2+ABz^3+\frac{1}{1.2}B^2z^4+ \text{i t. d.}$$

$$\frac{k^3}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3}A^3z^3+\frac{1}{1.2}A^2Bz^4+ \text{i t. d.}$$

$$\frac{k^4}{1.2.3.4} = \ldots \qquad \frac{1}{1.2.3.4}A^4z^4$$

$+$ i t. d.

$$-z=-z \qquad =0.$$

 ponieważ

ponieważ to zrównanie ieſt toſamé, każdy wſpółczynnik z ieſt zero; s kąd mámy tylé zrównań ilé nám ich potrzeba na oznaczenie A, B, C, D, i t. d. znáydziémy zaś $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}$, $D=\frac{1}{12}$, a przeto

$$k=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3+\tfrac{1}{12}(a-1)^4 \text{ i t.d.} \quad (D)$$

widzémy że tén oſtatni ſzereg nie może nám dadź bliſkiéy wártości na k w funkcyi a, ieżeli a nie ieſt ułomkiém barzo małym.

Wyciągaią ſię zrównaniá na zachowanie tá blic logarytmów.

Staráymy ſię teráz przyiśdź do wyrażeniá logarytmu iakiéykolwiek liczby przez ſzereg nieſkończony, upatruiąc oráz innégo zrównaniá w ktorémby k bydź mogło dokładniéy wyrażoné przez a. Maiąc na pamięci piérwſzé wártości na f, g, połóżmy - - -

$$(1+fk)^g=1+z=a^{fg}, \qquad 1+fk=(1+z)^{\frac{1}{g}} \text{ - - -}$$

$$fg=\frac{g}{k}\left[(1+z)^{\frac{1}{g}}-1\right]; \text{ aże } gf=l.(1+z); \text{ więc}$$

$$l.(1+z)=\frac{g}{k}\left[(1+z)^{\frac{1}{g}}-1\right];$$ rozebráwſzy podług wzoru Newtona drugi tén zrównaniá członek na ſzereg nieſkończony, i położywſzy za $g-1$, $g-2$, $g-3$, i t. d. g; wyp dnie:

$$l.(1+z)=\frac{1}{k}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{i t. d.}\right) \quad (E)$$

żebyśmy tém barziéy maleiący otrzymali ſzereg, połóżmy znowu $a^{fg}=(1+fk)^g=1-z$; będzie

$$fg=l.(1-z)=\frac{g}{k}\left[(1-z)^{\frac{1}{g}}-1\right]; \text{ aże}$$

$$(1-z)^{\frac{1}{g}}-1=-\frac{z}{g}-\frac{g-1}{g.2g}z^2-\frac{(g-1)(2g-1)}{g.\,2g.\,3g.}z^3$$

— i t. d.

podług zaś piérwſzégo przypuſzczeniá $g-1=g-2=g-3=g-4$ i t. d. $=g$

$$l.(1-z)=\frac{1}{k}\left(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}-\text{i t.d.}\right) (F)$$

zrównanie

zrównanie (F) odciągnąwſzy od zrównania (E), otrzymámy

$$l.(1+z)-l.(1-z)=l.\frac{1+z}{1-z}=\frac{2}{k}\Big(z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{9}z^9+\text{ i t. d.}\Big)\text{ - - - - (G).}$$

to oſtatnié zrównanie ſłuży nám na wyrażenie logarytmu iakiéykolwiek bądź liczby przez ſzeregi nieſkończoné. Chcąc n.p. miéć *log.* 5, czynię - - - -

$\frac{1+z}{1-z}=5$, a przeto $z=\frac{4}{6}$

$$log.5=\frac{2}{k}\Big(\frac{4}{6}+\frac{4^3}{3.6^3}+\frac{4^5}{5.6^5}+\frac{4^7}{7.6^7}+\frac{4^9}{9.6^9}+\text{ i t. d.}\Big)$$

znaiąc k, i znaleziony ſzereg przerobiwſzy na ułomki dzieſiątkowé, kilka terminów początkowych dá nám barzo bliſki logarytm liczby 5. Chcąc teráz z (G) wyciągnąć na k wyráz przez funkcyą a; połóżmy $\frac{1+z}{1-z}=a$, zaczém $z=\frac{a-1}{a+1}$, a ponieważ $log.\,a=1$, będzie z (G)

$$k=2\Big(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3.(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5.(a+1)^5}+\frac{(a-1)^7}{7.(a+1)^7}+\text{ i t.d.}\Big)\ (H)$$

ieżeli $a=10$; będzie:

$$k=2\Big(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.(11)^3}+\frac{9^5}{5.(11)^5}+\frac{9^7}{7.(11)^7}+\frac{9^9}{9.(11)^9}+\text{ i t. d.}\Big)$$

co przerobiwſzy na ułomki dzieſiątkowé, znáydziém:

$k=2,3025850929$ i t.d. $\frac{1}{k}=0,4342944819$. i t. d.

kładąc więc tym ſpoſobém iakiégośmy iuż użyli na 5, za $\frac{1+z}{1-z}$ iakąkolwiek liczbę, wynáydziémy ſzereg, którégo początkowé terminy zamiéniwſzy na ułomki dzieſiątkowé, i té przez $\frac{2}{k}$ rozmnożywſzy, wypadną

nám logarytmy *Briggiuſza*. Táblice więc logarytmów tym ſpoſobém łatwo mogą bydź rachowané.

Dwa głównė zrównaniá (*C*), (*H*), daią nám związek między k, i a, ták dalece, że k iak widzémy w zrównaniach i w teoryi, ciągnie za ſobą pewną wártość na grunt, i ſtanowi cały układ logarytmów; dlá tego też wártość na k nazywá ſię w Geometryi Foremnikiem (*Numerus regulator*). Każdy układ logarytmów má ſwégo foremniká i grunt, s których ieden zawiſł w ſwéy wártości od drugiégo. Uczyńmy n.p. $k=1$; zrównanie (*C*) zamiéni ſię na

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\text{i t.d.}$$

co przerobiwſzy na ułomek dzieſiątkowy, będzie $a=2,718281828$ i t. d. Logarytmy na taki grunt rachowané ſą náypiérwſzé logarytmy *Nepera* które dziś Przyrodzonemi albo Hyperbolicznemi (*Logarithmi naturales, Hyperbolici*) zowią; dlá tego, że przez takié logarytmy wyráżá ſię płaſzczyzna zamknięta łukiém linii krzywéy zwanéy *Hyperbola*. Użycie ich ieſt barzo rozległé w wyżſzych Matematyki częściach. Ilékolwiek zaś o logarytmach hyperbolicznych mówić będziémy, ich grunt z dziſiéyſzémi Geometrámi $2,718281$ i t. d. nazywać będziémy e, tak dalece: że rozumuiąc nad zrównaniém logarytmicznėm w gruncie 10, wyráżać ié ſtatecznie będziém przez $a^x=y$; znaczyć zaś będziémy zrównanie logarytmiczné przez $e^x=y$, ilé razy rzecz będzie do logarytmów hyperbolicznych ſtóſowaná.

Wſzyſtkié zrównaniá któreśmy na logarytmy i funkcye wykładniczé wyżéy wyciągnęli z J. P. *Eulerem*, náleżeć będą do gruntu e uczyniwſzy w nich $k=1$, i tak w układzie logarytmów hyperbolicznych:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{i t.d.}=\left(1+\frac{x}{g}\right)^g$$

$$l.(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{i t.d.}$$

$l.(1-z)$

$$l.(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}-\text{i t.d.}$$

$$l.\frac{1+z}{1-z}=2(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\text{i t. d.})$$

to ostatnie zrównanie służy nam do rachowania logarytmów hyperbolicznych iakichkolwiek liczb, chcąc n.p. mieć logarytm hyperboliczny liczby 2, czynię $\frac{1+z}{1-z}=2$, s kąd $z=\frac{1}{3}$, a przeto

$$\log. 2. =2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{i t. d.})$$

Co zamięniwszy na ułomek dziesiątkowy znaydziem *log.2=0,693147* tym samym sposobem znaydziemy *log.5=1,609437* - - - *log.7=1,945910.* i t. d. maiąc zaś niektórych liczb logarytmy; z nich wypadaią logarytmy liczb innych podług wyżey wyłożonych początków. n.p. *2.l.2=l.4; 2.log.5=log.25; log.2 + log.5= log.10; 2.log.7= log.49.* i t. d.

Takim sposobem J.P. *Euler* wyrachował naprzód logarytmy hyperboliczne aż do *26.* figur na dziesięć liczb początkowych, które potem P. *Wolfram* Lieutenant Artyleryi Rzeczy-Pospolitey Holenderskiey pociągnął aż do *10.009.* wydane przez P. *Schulze* w Berlinie 1778 wraz z logarytmami *Briggiusza* barzo wygodnie ułożonemi. W roku 1781 widziałem w Paryżu w manuskrypcie táblice logarytmów hyperbolicznych na liczby naturalne aż do *100.000*, które Benedyktyn ieden wyrachowawszy podał do rostrząsnienia Akademii umieiętności. Te approbowane od Akademii za mey ieszcze bytności zaczęto drukować.

§. L.

Sposób przerabiania logarytmów iedne go, na logarytmy drugiego układu.

Poznawszy iuż sposób rachowania logarytmów w iakimkolwiek układzie wróćmy się teraz do rostrząsnienia stósunków zachodzących między logarytmami różnych układów; i między logarytmami różnych liczb w tymże samym układzie. Co do pierwszego wyciągnęliśmy byli w §. 49. na ten stósunek zrównanie

 wnanie

wnanie $\frac{p}{q}=\frac{log.e}{log.a}$ czyli $p=\frac{log.e}{log.a}.q$ - - - (m), co nás uczy, że ieżeli a znaczy grunt logarytmów Briggiuſzowych, e zaś grunt hyperbolicznych, p logarytm liczby n náleżący do piérwſzégo, q logarytm téyże ſamé́y liczby náleżący do drugiégo układu; możémy za pomocą zrównaniá (m) przerobić logarytm hyperboliczny na logarytm Briggiuſza: ieżeli bowiem $log.e=1$, $log.a$ czyli $log.\ hyper.\ 10=2,302585$; będzie $\frac{log.e}{log.a}=\frac{1}{2,302585}=0,434294$, przeto $p=0,434294.q$: mnożąc więc iakiéykolwiek liczby log. hyperb. q, przez $0,434294$, przerobiémy go na logarytm Briggiuſza. Chcąc zaś logarytmy Briggiuſza zamiénić na hyperboliczné; oſtatnié zrównanie daie mi - - - -

$q=\frac{1}{0,434294}\ p=2,302585.p$ to ieſt, mnożąc każdy logarytm Briggiuſza p, przez $2,302585$, zamiéniémy go na hyperboliczny. S kąd poznaiémy iak ieſt łatwo logarytmy iednégo układu przerobić na logarytmy drugiégo iakiégokolwiek. Mnożnik tén przerábiaiący tak logarytmy, nazywá ſię ZAMIENNIK *(Modulus)*.

Wſzyſtkié zrównaniá na rachowanie logarytmów uſtanowioné różnią ſię foremnikiém k, który w dwóch od nás roſtrząſanych układach wypádá z rozdzieleniá logarytmu hyperbolicznégo q iakiéykolwiek liczby n, przez logarytm Briggiuſza p téyże ſamé́y liczby, to ieſt $\frac{q}{p}=k$: przypuśćmy że $n=10$; łogar. Brigg. $10=p=1$. więc $q=k$, to ieſt foremnik układu Briggiuſza ieſt równy logarytmowi hyperbolicznému liczby 10. co nám ſię właśnie w wyżſzym iuż rachunku pokázało.

Zebyśmy nic nie opuścili co do wyrazu funkcyi wykładniczych náleży, ſtaráymy ſię wzór Briggiuſza

$a^x=y$

$a^x=y$ wyrazić przez szereg nieskończony logarytmów hyperbolicznych. To zaś łatwo barzo wyciągniemy z zrównania (B) §. 49. położywszy w niem a za b, x za z, i foremnika $k=1$, będzie

$$a^x=1+x\log.a+\frac{x^2}{1.2}(\log.a)^2+\frac{x^3}{1.2.3}(\log.a)^3+ - - \frac{x^4}{1.2.3.4}(\log.a)^4+ \text{ i t. d. } - - - - (B')$$

funkcyá więc iakákolwiek wykładnicza może się rozebrać na szereg nieskończony za pomocą logarytmów hyperbolicznych przez użycie zrównaniá (B'), tak iako też sama funkcyá rozbierze się na szereg nieskończony za pomocą logarytmów Briggiusza przez użycie wzoru (B) §. 49.

Zostaie nám teráz rostrząsnąć stósunek logarytmów różnych liczb w iednym układzie. Weźmy na to dwie liczby M, N; pierwszey logarytm w gruncie a nazwiymy p; drugiey logarytm w tymże samym układzie nazwiymy q; wypadną zrównaniá $a^p=M$; $a^q=N$. obydwa przerobiwszy na $a^{pq}=M^q$, $a^{pq}=N^p$; będzie $M^q=N^p$, $M=N^{\frac{p}{q}}$ uczyniwszy $M=N^{\frac{m}{n}}$ będzie $N^{\frac{m}{n}}=N^{\frac{p}{q}}$ czyli $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, te zrównaniá nie zamykaią w sobie a, więc stósunek dwóch logarytmów w tymże samym układzie iest nie zawisły od gruntu, czyli ten stósunek iest ieden we wszystkich iakichkolwiek układach: te zrównaniá nám pokazuią, że logarytmy potęg teyże samey liczby w iakimkolwiek układzie tak się maią iako ich wykładniki.

Pokazuie się użycie táblic logarytmicznych w ułomkach.

S tey ostatniey prawdy złączoney z innemi wyżey wyłożonemi wypádá nám sposób użyciá logarytmów liczb cálkich do liczb łomanych. Wiemy naprzód że ieżeli $\log.1=0$; logarytmy wszystkich ułomków práwdziwych są odiemne: żebyśmy więc ułomki mogli rachować przez te same logarytmy co i liczby cálkie,

R5 należy

należy koniecznie cechę licznika uczynić większą od cechy mianownika, aby reszta z odciągania wypadła dodatnia. Na ten koniec zgodzili się Geometrowie logarytmy na liczniki ułomków tak rachować, że w nich iedność ma za logarytm *10*, albo *100*; a przeto $\frac{1}{10}$ =0, 1 ma za logarytm *9*; albo *99*, co łatwiey w następuiącey tablicy poznamy.

Ułomki.	Ich logarytmy.		
1 - - - -	10,000000	albo	100,000000
0,1 - - - -	9,000000	- -	99,000000
0,01 - - - -	8,000000	- -	98,000000
0,001 - - -	7,000000	- -	97,000000
0,0001 - -	6,000000	- -	96,000000
i t. d.			

kiedy więc mamy do czynienia z ułomkiem n. p. $\frac{5}{465}$, bierzemy s tablic logarytm 5, i do iego cechy dodawszy 10, odciągamy od niego logarytm zwykły mianownika 465, s czego wypadnie nam logarytm reszty 8,0311170: szukam odpowiadaiącey liczby temu logarytmowi nie maiąc względu na iego cechę, a tę znalazłszy 10752, tyle dodaię zero przed figurami, ile cesze logarytmu brakuie iedności do dziesiątka, s tych zero ieden zastępuie mieysce liczb całkich i oddziela się kreską: i tak *log*. 8,0315170 ma liczbę odpowiadaiącą 0,010752= $\frac{5}{465}$.

Przyczynę tego działania pokazuią nam własności ułomków dziesiątkowych i logarytmów: powiększyć bowiem cechę logarytmu dziesiątkiem, iest to liczbę temu logarytmowi odpowiadaiącą rozmnożyć przez 10000000000; potrzeba więc po skończonem działaniu przez tę samę liczbę wypadek cały rachunku rozdzielić, aby liczbę podaną wrócić do swey dawney wartości: to dzielenie wykonywa się przez dodanie tyle zero przed figurami ile cesze brakuie iedności

do

do dziesiątka. I tak w podanym przykładzie *log.* 8,0315170 przez swoię cechę pokazuie, że liczba mu odpowiadaiąca powinna mieć 9 figur, dopełniwszy ią przez zero na końcu przydané, i całą tę liczbę potém rozdzieliwszy przez 10000000000, przypadnie przed figurami tylé zero; ilé cesze logarytmu brakuie iedności do dziesiątka. Przez tę samę sztukę szukaiąc logarytmu ułomku dziesiątkowégo, bierzémy logarytm figur tego dziesiątka, iak gdyby były całkié, kładąc za cechę liczbę tylé się od dziesiątka różniącą; ilé poprzedzą zero też figury, i tak liczby 0,00175 logarytm iest 7,2430380.

Ponieważ zaś w tym użyciu logarytmów, bierzémy 10 za logarytm iedności; we wszystkich działaniach arytmetycznych muszémy mieć wzgląd na 1, i iéy logarytm. Wszystkié bowiem działaniá arytmetyczné nic innégo nie są, tylko różné sposoby porównywaniá wielkości iakiéykolwiek s swą iednością, i wynaydowaniá różnych odmián wypádaiących albo z odmiany iedności albo z odmiany wielkości saméy: i tak mnożyć n. p. liczbę a przez b, nic innégo nie znaczy, tylko znaleśdź wártość b kiedy iego 1 odmieniá się na a, czyli znaleśdź stósunek b do mnogości taki; iaki iest iedności do a, to iest $1:a::b:\frac{ab}{1}$, należy więc w teraźniéyszém używaniu logarytmów od logarytmu mnogości odciągnąć logarytm iedności 10: Podobnie potrzeba mowić o dzieleniu, które zależy na wynalezieniu takiégo stósunku liczby podzielnéy do wielorazu, iaki iest liczby dzielącéy do iedności to iest: chcąc n.p. liczbę ab rozdzielić przez b, należy rozwiązać proporcyą, $b:1::ab:\frac{ab.1}{b}$ przeto należy nám wprzód do logarytmu liczby podzielnéy dodadź $log. 1 = 10$, a dopiéro od téy summy odciągnąć logárytm liczby dzielącéy. Té wszystkié względy na iedność i iéy logarytm odpádaią w liczbach całkich,

 poniéwáż

poniéwáż tam $log..1.=0$. Zobáczmy té wſzyſtkié prawidła w przykładach.

Przykład mnożenia: niech będą ułomki $\frac{3}{124} \times \frac{25}{732}$

$$log.\frac{3}{124} = 8,3836996.$$

$$log.\frac{25}{732} = 8,6720284.$$

log. mnogości $= 17,0557270 - 10 = 7,0557270$ którému podług piérwſzégo prawidła odpowiadá liczba $0,0011369 = \frac{3}{124} \times \frac{25}{732}$

Przykład dzielenia: niech będą ułomki $\frac{1}{3082} : \frac{7}{29}$

$$log\frac{1}{3082} + log.1 = 16,5111674$$

$$log.\frac{7}{29} = 9,3827000$$

log. wielorazu $= 7,1284674.$

którému odpowiadá liczba $0,0013442 = \frac{1}{3082} : \frac{7}{29}.$

a poniéwáż wynoſzenie do potęg nic innégo nie ieſt, tylko mnożenie liczby ſaméy przez ſię tylé razy powtórzoné, ilé wykładnik potęgi zmniéyſzony 1, má w ſobie iedności; wyciąganie zaś piérwiáſtków tyléż i takimże ſpoſobém powtórzoné dzielenie; za każdém zaś mnożeniém należy odciągać od logarytmu mnogości 10; tak iak za każdém dzieleniem potrzeba do liczby podzielnéy dodáwać 10, idzie za tém, że wynoſząc ułomek iaki do potęgi m, za pomocą logarytmów, potrzeba od logarytmu potęgi odciągnąć liczbę $10.(m-1)$: wyciągaiąc zaś piérwiáſtek należy wprzód cechę logarytmu ułomku podanégo powię-

kſzyć

kſzyć liczbą $10.(m-1)$, a dopiéro go potém rozdzielić przez wykładnika piérwiáſtku. Zobáczmy to w przykładach.

Przykłád wynoſzeniá do potęg: wynaleśdź wártość $(0,05)^5$. - - - $5.log.0,05=5.8,6989700=43,4948500$. od téy mnogości odciągnąwſzy $10.(5-1)=40$, zoſtanie ſię $3,4948500=log.(0,05)^5$, którému odpowiadá liczba $0,0000003125=(0,05)^5$.

Przykłád wyciągániá piérwiáſtków. Wynaleśdź wártość $\sqrt[6]{0,15}$. - - - $log.0,15+40=49,1760913$. rozdzieliwſzy go przez 6, wypádnie logarytm piérwiáſtku $8,1960152$ którégo liczba $0,015704=\sqrt[6]{0,15}$.

Takim ſpoſobém przyſtóſowané logarytmy do ułomków niezmiernie rachunki arytmetyczné ułátwiáią, i ſłużą do obiaśnieniá táblic trygonometrycznych, dlá których prawie náyſzczególniéy tén rodzáy rachunku był wynaleziony, i do nich iedynie użyty od *Nepera*. S tegoć to podobno powodu J. P. *Euler* przyſtóſowawſzy barzo ſzczęśliwie rachunek Algebraiczny do logarytmów, obrał ſobie zaráz rachunek trygonometryczny do wydoſkonaleniá w tymże ſamym widoku, ale z więkſzą daleko pomyślnością, i z niezmiernie rozległéyſzym dla geometryi pożytkiém. Wypáda nám o nim z barzo proſtégo rzeczy porządku mówić. Ieżeli bowiem we wſzyſtkich matematyki częściach, gdzié rachunek arytmetyczny wchodzi, pomoc Algebry przez ogólność ſwoich znaków i prawideł, rosciągá barzo daleko gránice prawdy; w trygonometryi zaiſte która ieſt czyſtém przyſtoſowaniém arytmetyki do geometryi, rachunek algebraiczny náyſzczęśliwiéy udadźby ſię powinién, i przyłożyć ſię do doſkonałości ledwo nie wſzyſtkich matematycznych nauk, i od nich zawiſłych ſztuk i rzemióſł, w których użycie trygonometryi ieſt nieuchronné. Iakóż ſkutek pokázáł, że ſtworzenie tego rachunku, i wprowadzenie go w całą matematykę, będzie zawſze na czele náypożyteczniéyſzych

wynalázków

wynalázków tego wielkiégo Geometry. Należy do iſtoty naſzégo zamiaru wyłożyć go w całéy ſwéy obſzerności i świetle. Trzymaiąc ſię ściśle naſzégo w téy xiążce przedmiotu, powinnibyśmy wſzyſtkié trygonometryi początki mimo ſię puścić, wyciągaiąc poprzédzaiącéy tey wiadomości po czytelniku; ale pamiętni na niedoſtatek narodu, w którym rozrzucone geometryi xiążki barzo wiele do czynieniá w arytmetyce i trygonometryi zoſtawiły, nie uſpoſábiaiąc uczących ſię do dziſiéyſzego ſtanu matematyki, i nie poprawiaiąc wielé niedokładnych i fałſzywych tłómaczeń w ſtóſunku liczb do linii; uznaliśmy za potrzebę, ogólny przynáymniéy widok całéy trygonometryi wyłożyć, i z niego wyciągnąć analityczny rachunek linii, któré trygonometrycznémi nazwano.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

S pierwſzych początków Trygonometryi wyciągá ſię rachunek LINII TRYGONOMETRYCZNYCH; tłómaczą ſię właſności ŁUKÓW KOŁA (drugi rodzay funkcyi przeſtępnych); ſpoſób rachowaniá Táblic trygonometrycznych i ich Logarytmów: użycie nakoniec tego rachunku s poprzédzaiących pokazuie ſię rozdziáłów.

§. LI.

Obráz ogólny o wymiarach płaſzczyzn.

Wſzyſtkié figury liniami proſtémi zamknięté rozebrać ſię mogą na troykąty, przeto do ich wymiaru doſyć nám ieſt wiedzieć ſpoſób mierzenia troykątów. Każdy troykąt má w ſobie ſześć rzeczy do uwáżaniá: wſzyſtkié te wchodzą w iego rozmiár, od wielkości bowiém dwóch boków, i różnéy ich do ſiebie pochyłości, zawiſła wielkość trzeciégo i iego pochyłość do pierwſzych, a od wſzyſtkich tych, wielkość

kość płaszczyzny w troykącie zawártéy. Wymiár figury dzieie się przez porównanie płaszczyzny z inną płaszczyzną wziętą za miarę, która się za zwyczáy brać zwykła s cząstek figury. Równanie dwóch płaszczyzn rodzi stósunek, który póty nie odkryie wymiaru płaszczyzny podanéy, poki go nie zrównámy z drugim stósunkiém. Drugi tén stósunek bierzémy z nauki ogólnéy stósunków czyli z arytmetyki, szukaiąc liczby, któráby się tak miała do swéy iedności, iako się má płaszczyzna podaná do swoiey miary. I na tém ci to wynaydowaniu liczb wspomnionych, i wyrażeniu przez nie stósunku zachodzącégo między płaszczyznami, zależy cała część geometryi o wymiarach płaszczyzn. Dowodzi ona nám, że maiąc kwadrat, a z iego wysokości wziąwszy część za iedność liniową, drugą znowu część równą s podstawka; s tych dwóch części zrobiwszy kwadracik mały, tego kwadracika płaszczyzna, má się do płaszczyzny kwadratu podanégo, iako się má mnogość liczebná ze zbioru iedności liniowych wysokości, przez zbiór iedności liniowych s podstawka; do iedności liczebnéy ogólnéy. S kąd wyciągámy tę regułę: że płaszczyzna kwadratu iest równá mnogości z wysokości przez podstawek. Ten skrócony w geometryi wyráz nie wytłomaczony dobrze poczynaiącym, wprawić ich może w barzo przewrotné geometryi rozumienie: wiémy bowiem że liniá nie może się mnożyć przez linią, bo w tém działaniu iedén z mnożników bydź koniecznie powinién liczbą oderwaną i ogólną.

Z wymiaru płaszczyzn wypádá potrzebá trygonometryi, i linii w niéy używanych.

W takowém płaszczyzn między sobą równaniu i wyrażeniu ich do siebie stósunku przez liczby, czwárty termin wypádá koniecznie s trzech iuż wiadomych, a zatém z sześciu rzeczy w skłád troykąta wchodzących trzy tylko są wolné dlá naszych przypuszczeń, inné zaś trzy iuż są wypádkiém koniecznym s piérwszych. I na tém ci to wynaydowaniu trzech rzeczy, z innych trzech podanych záleży

całá

cała ſztuka rachowania troykątów, którą *Trygonometryą* nazwano, a która ieſt tylko proſtym rachunkiem arytmetycznym do geometryi ſtósowanym. Idzie więc w trygonometryi o porównanie ſześciu rzeczy między ſobą, i wyciągnienie przez nię trzech niewiadomych s trzech podanych. Linie proſte iakiemi ſą boki troykąta potrafiemy dobrze między ſobą rórównać, i ſtósować: ale iakże ſtósować kąty z liniami? Geometrowie obrali ſobie obwód koła do wymiaru kątów, lecz nie maiąc dokładnego ſtósunku między linią proſtą i krzywą, nie można było boków równać z łukami zamykaiącemi kąty. Trzeba im więc było powymyślać inne linie proſte znaczące łuki koła, i kąty, s których wielkości możnáby przyiśdź do wielkości kątów.

Fig. 1. Wziąwſzy ſobie na figurze 1. łuk *DB* mierzący kąt *ACB*; linie proſte oznaczaiące ten łuk ſą: pionowá *AB* która ſię nazywá WSTAWĄ ŁUKU *DB* lub kąta *ACB* (*Sinus arcûs vel anguli*); *DA* WSTAWĄ ODWRÓCONĄ (*Sinus verſus*): *ED* STYCZNĄ (*Tangens*): *EC* SIECZNĄ tego ſamego łuku lub kąta (*Secans*). Aże z wiadomości łuku *DB* wypádá wiadomość łuku *BG* który ieſt iego dopełnieniem, więc i linie dopieró wymienione odkryć nám zaráz powinny podobne linie ſłużące łukowi *BG*, albo że iaśniey powiem, linie łuku *DB* mieć powinny inne odpowiadaiące ſobie w łuku *BG*: iakoż *BH*=*AC* która ieſt wſtawą łuku *BG*, nazywá ſię DOSTAWĄ łuku *DB* (*Coſinus arcûs*); *HC*=*BA* która ieſt wſtawą *DB* nazywá ſię Doſtawą *BG*; *GH* która ieſt Wſtawą odwróconą *BG*, zowie ſię Doſtawą odwróconą *DB* (*Coſinus verſus*) *FG*, która ieſt Styczną *BG*, zowie ſię Doſtyczną *DB* (*cotangens*): Sieczná nakoniec *FC* łuku *BG*, ieſt Doſieczną łuku *DB* (*Coſecans*): i tak co ſię w iednym łuku zowie Wſtawą, Styczną, Sieczną, i t. d. to w iego dopełnieniu nazywá ſię Doſtawą, Doſtyczną, Doſieczną, i t. d. Wſzyſtkie te linie iak widzemy, ſą liniami proſtemi i funkcyami promienia, który

będąc

náywiękſzą wſtawą łuku 90, má imie Wstawy prostey (*Sinus rectus*). Naznaczywſzy takim ſpoſobém linie wyrážaiącé łuki, potrzeba ié było przywiéśdź do iednéy powſzechnéy miary porównywaniá, to ieſt wyrazić ié w cząſtkach promienia *DC*: oprócz tego znaleśdź ſtóſunek między niémi wſzyſtkiémi, za któré go pomocą maiąc n.p. wſtawy, moglibyśmy przyiśdź do odkryciá doſtáw, ſtycznych, doſtycznych, ſiecznych, doſiecznych i t. d. potrzeba ieſzcze było znać przynáymniéy iednę takową linią w cząſtkach promienia, a dopiéro od téy wiadoméy przyiśdź do wſzyſtkich odpowiadaiących łuków, począwſzy od náymniéyſzégo aż do náywiękſzych. To oſtatnié zadanie rozwięzuie nám geometrya: ieżeli bowiem wſtawa ieſt połową cięciwy; cięciwa zaś łuku 60° ieſt równá promieniowi; więc wſtawa łuku 30° ieſt połową promienia. Iakimżeby ſpoſobém od wſtawy łuku 30° wiadoméy przyiśdź do wſtáw innych iakichkolwiek łuków? oto gdybyśmy mieli ſpoſób s wſtawy iakiégo łuku, wynalezieniá wſtawy łuku podwóynégo, iego połowy; powtóre z dwóch łuków poiedynczych wſtawę ich ſummy lub różnicy; mielibyśmy zaraz wſtawę łuków 15°, $7^{\circ}+30'$, 45°, i innych. Té wſzyſtkié uwági pokazuią nám że do wynalezieniá linii wſpomnionych które *trygonometrycznémi* nazwano, na wſzyſtkié łuki koła, rozwiązać nám potrzeba naſtępuiącé zadaniá:

Piérwſzé: wynaleśdź związek zachodzący między wſzyſtkiémi liniami trygonometrycznémi.

Drugié: maiąc wſtawy poiedyncze dwóch łuków, wynaleśdź wſtawę ich ſummy i różnicy.

Trzecie: maiąc wſtawę iakiégo łuku, wynaleśdź wſtawę łuku podwóynégo i iego połowy.

Nim przyſtąpiémy do rozwiązaniá tych zadáń, zgodziémy ſię dlá większéy wygody w rachunku, promień koła, który ieſt zawſze ilością ſtateczną, wziąść za iedność; wſzyſtkié więc wſtawy łuków iakichkolwiek, wyiąwſzy łuk 90°, będą ułomkami.

Pierwſzé zadanie rozwięzuią nám proporcye z geometryi wyięté, a przez algebraiczné zrównaniá wyrażoné, dlá czego łuk iakikolwiek *DB*, nazwiémy *p*; będzie więc $BG=90^\circ-p$: dlá krótkości zaś użyiémy naſtępuiących wyrazów: *wſt.p*, znaczyć będzie, *wſtawa łuku albo kąta p*, podobnie:

Doſt: *p*. znaczy Doſtawa łuku lub kąta *p*. (*Coſinus arcûs p*).

Sty: *p*. Styczná łuku lub kąta *p*. (*Tangens arcûs p*).

Doſty: *p*. Doſtyczná *p*. - - - (*Cotangens p*).

Siec: *p*. Sieczná łuku lub kąta *p*. (*Secans arc. p*).

Doſie: *p*. Doſieczná łuku lub ką. *p*. (*Coſecaus ar. p.*)

Wſt: *odwr*: *p*. Wſtawa odwrócona (*Sinus verſus*).

Doſt: *odw*: *p*. Doſtawa odwrócona (*Coſinus verſus.*)

Ł.Wſt: *k*. Łuk który má za wſtawę *k*. (*Arcus cujus ſinus k*).

Ł. *Doſt*: *k*. Łuk który má za Doſtawę *k*. (*Arcus cujus coſinus k*). i t. d.

a náprzód chcąc wynaleśdź związek między wſtawą i doſtawą, to ieſt między *AB*, i $AC=BH$ mámy podług prop. 47. 1. Xięgi *Euklideſa* naſtępuiącé zrównanie $(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$, czyli $1=(wſt.p)^2+(Doſt.p)^2$, a przeto $Doſt.p=\sqrt{(1-[wſt.p]^2)}$. Inné zrównaniá wyciągniémy s podobieńſtwa troykątów, znacząc ié przez (∽): i tak troykąt $EDC \backsim \triangle BAC \backsim \triangle FCG \backsim \triangle BCH$, które daią naſtępuiącé proporcye.

$CA:DC::AB:ED$ to ieſt $doſt.p:1::wſt.p:ſty.p$, s kąd

$$ſty.p=\frac{wſt.p}{doſt.p}$$

$ED:DC::GC:GF$ - - $ſty.p:1::1:doſty.p$, s kąd

$$doſty.p=\frac{1}{ſty.p}$$

$AC:BC::DC:EC$ - - $doſt.p:1::1:ſiec.p$, s kąd

$$ſiec.p.=\frac{1}{doſt.p}$$

HC:

$HC:BC::GC:FC$ - - $wſt.p:1::1:$ $doſie.p$, s kąd

$doſie.p = \frac{1}{wſt.p}$

té zrównaniá daią nám związek między wſzyſtkiémi liniami trygonometrycznémi i rozwięzuią piérwſzé zadanie.

Co do drugiégo: niech będzie na Fig. 2. łuk $KB=x$, którégo wſtawa KL, doſtawa LG, łuk $BA=y$, którégo wſtawa BD, doſtawa GD; potrzeba nám wynaleśdź łuku $KA=x+y$ wſtawę KM, i doſtawę GM; poprowadziwſzy LO, $LP=MO$, do złożeniá troykątów podobnych GBD, GLP, tak aby w ich ſkłád wchodziły linie wiadomé, będzie wſtawa któréy ſzukámy $KM=KO+OM$; wypádá nám náprzód: Fig. 2.

$GB:GL::BD:LP=OM$, to ieſt $1: doſt.x:: wſt.y:OM=$ $wſt.y.doſt.x$ powtóré $\triangle GBD \backsim KLO$ daie naſtępuiącą proporcyą:

$GB:GD::KL:KO$ to ieſt, $1: Doſt.y:: wſt.x:KO= wſt.x.$ $doſt.y$; $KO+OM= wſt.(x+y)= wſt.x\ doſt.y+ Doſt.x$ $wſt.y$ - - - - - - (1).

Chcąc zaś wynáléśdź GM czyli $doſt.(x+y)$, mámy náprzód $GB:GD::GL:GP$ to ieſt: $1: doſt.y:: doſt.x\ GP=$ $doſt.x\ Doſt.y$. Powtóré: - - - - -

$GB:GD::KL:LO$ to ieſt: $1: wſt.y:: wſt.x:LO= wſt.x.$ $wſt.y$ więc $GM=GP-LO= doſt.(x+y)= doſt.x\ doſt.$ $y -$ $wſt.x.wſt.y$. - - - - - (2)

Drugą część tego ſamégo zadaniá chcąc rozwiązać, nazwiymy na Fig. 3. KB (x), BA (y) s których wſtáw i doſtáw poiedynczych KL, GL; BD, GD, potrzeba nám wynaleśdź wſtawę i doſtawę łuku - - - $KB-BA=x-y$. Poprowadziwſzy MO, PL, LO, dlá złożeniá troykątów podobnych z linii znanych, náprzód $\triangle GBD \backsim \triangle GLP$, a przeto:

$GB:GL::BD:LP=OM$ to ieſt: $1: doſt.x:: wſt.y:OM=$ $wſt.y\ doſt.x$. Powtóré $\triangle KOL \backsim \triangle GBD$, więc

$BG:GD::KL:KO$ to ieſt: $1: doſt.y:: wſt.x: KO= wſt.x.$ $doſt.y$, s kąd $KM=KO-OM= wſt.(x-y) = wſt.x.$ $doſt.y-$ $doſt.x\ wſt.y$ - - - - (3)

Na wynalezienie zaś $GM = \text{doſt.}(x-y)$ mamy náprzód $GB:GD::GL:GP$ to ieſt $1 : \text{doſt.}\, y :: \text{doſt.}x : GP = \text{doſt.}x.\ \text{doſt.}\, y$. Powtóre. - - - - - $GB:BD::KL:OL$ to ieſt $1 : \text{wſt.}y :: \text{wſt.}\, x : OL = \text{wſt.}y.\ \text{wſt.}\, x$, s czego otrzymuiemy $\text{doſt.}\ (x-y) = \text{doſt.}\, x.\ \text{doſt.}y + \text{wſt.}x\ \text{wſt.}y$. - - - - (4).

Wynaleźliśmy więc cztery zrównania:

(1) $\text{wſt.}(x+y) = \text{wſt.}x.\ \text{doſt.}y + \text{doſt.}x.\ \text{wſt.}y$

(2) $\text{doſt.}(x+y) = \text{doſt.}x.\ \text{doſt.}y - \text{wſt.}x.\ \text{wſt.}y$ (α).

(3) $\text{wſt.}(x-y) = \text{wſt.}x.\ \text{doſt.}y - \text{Doſt.}x.\ \text{wſt.}y$

(4) $\text{doſt.}(x-y) = \text{doſt.}x.\ \text{doſt.}y + \text{wſt.}x.\ \text{wſt.}y$

Dodáwſzy zrównaniá (1) z (3), i znowu odciągnąwſzy té ſamé od ſiebie, otrzymámy inné cztéry.

(1) $2.\ \text{wſt.}x.\ \text{doſt.}y = \text{wſt.}(x+y) + \text{wſt.}(x-y)$,

(2) $2.\ \text{doſt.}x.\ \text{doſt.}y = \text{doſt.}(x+y) + \text{doſt.}(x-y)$, ($\beta$)

(3) $2.\ \text{doſt.}x.\ \text{wſt.}y = \text{wſt.}(x+y) - \text{wſt.}(x-y)$,

(4) $2.\ \text{wſt.}x.\ \text{wſt.}y = \text{doſt.}(x-y) - \text{doſt.}(x+y)$.

uczyniwſzy w zrównaniach (α) $x = y$, pierwſzé dwa zrównaniá daią nám:

$\text{Wſt.}2y = 2;\ \text{wſt.}y,\ \text{doſt.}y$, - - $\text{Doſt.}2y = (\text{doſt.}y)^2 - (\text{wſt.}y)^2$

oſtat. zaś dwa. $\text{wſt.}o = o$, $\text{doſt.}o = (\text{doſt.}y)^2 + (\text{wſt.}y)^2 = 1$.

to ieſt: że wſtáwa łuku zero rowná ieſt zero; doſtáwa zaś łuku zero równá ieſt promieniowi koła, co nám właśnie ſama figura pierwſzá okazuie. Tę ſamę wártość wprowadziwſzy w zrównanie (β) - - $x = y = \frac{1}{2}a$, pamiętaiąc o dopiero wyciągnionych zrównaniach, otrzymámy z (2) i (4)

$$\text{Wſt.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1-\text{doſt.}a}{2}\right)};\quad \text{Doſt.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1+\text{Doſt.}a}{2}\right)}$$

Dwa té zrównaniá wyrážaią wſtáwy i doſtáwy połowy łuku przez wſtawę i doſtawę łuku całkiégo, tak iako pierwſzé dwa wſtawę i doſtawę łuków podwóynych przez wſtawę i doſtawę łuków poiedynczych, przeto obydwa rozwięzuią zadanie trzecié. Każdy z nás łatwo poymuie, iakim ſpoſobem maiąc wiadomą wſtawę łuku 30°, i zrównaniá z rozwiązaniá trzech zadań wypadłé, rachowané s tąd

bydź

bydź mogą wstawy i dostawy łuków innych.

Iakośmy zaś z zrównań (ω) potrafili wyciągnąć wstáwy łuków podwóynych uczyniwszy $x=y$, tak w tychże samych kładąc za $x=2y$, $x=3y$, $x=4y$ następnie, i zamieniaiąc wstawy łuków podwóynych, potróynych i t. d. za ich wártości w łukach poiedynczych, otrzymámy podobnie:

$Wst.3y=3.wst.y(dost.y)^2-(wst.y)^3$ - - - -

$Dost.3y=(dost.y)^3-3dost.y(wst.y)^2$. i t. d.

położywszy teráz $wst.x=p$, $dost.x=q$, $wst.y=m$, $dost.y=n$ i dwa zrównaniá $p^2+q^2=1$, $m^2+n^2=1$, używaiąc do zamián; otrzymámy:

$Wst.x=p.$

$wst.(y+x)=mq+np.$

$wst.(2y+x)=2n(mq+np)-p.$

$wst.(3y+x)=2n[2mnq+2n^2p-p]-mq-np.$

i t. d.

to iest:

$Wst.x=wst.x$

$wst.(y+x)=wst.y.dost.x+dost.y.wst.x$

$wst.(2y+x)=2\,dost.y.wst.(y+x)-wst.x$

$wst.(3y+x)=2\,dost.y.wst.(2y+x)-wst.(y+x)$

$wst.(4y+x)=2\,dost.y.wst.(3y+x)-wst.(2y+x)$

$wst.(ny+x)=2\,dost.y.wst.[(n-1)y+x]-wst.[(n-2)y+x]$

to samo i na dostawy.

$Dost.x=q$

$dost.(y+x)=nq-mp.$

$dost.(2y+x)=2n(nq-mp)-q$

$dost.(3y+x)=2n(2n^2-2mnp-q)-nq+mp$

i t. d.

to iest:

$Dost.x=dost.x$

$dost.(y+x)=dost.y.dost.x-wst.y.wst.x$

$dost.(2y+x)=2.dost.y.dost.(y+x)-dost.x$

$dost.(3y+x)=2.dost.y.dost.(2y+x)-dost.(y+x)$

$dost.(4y+x)=2.dost.y.dost.(3y+x)-dost.(2y+x)$

$dost.(ny+x)=2.dost.y.dost.([n-1]y+x)-dost.[(n-2)y+x]$.

gdzie widzémy, że kiedy łuki idą w postępie arytme-

tycznym ich wstawy i dostawy maią postęp zwrotny, iakiby wypadł z odwikłania ułomku maiącego za mianownika $1-2nx+(m^2+n^2)x^2$ podług §. 32.

S tych ostatnich zrównań uczyniwszy $x=y$ wnoszą się inne wielkiego w rachunku matematycznym używania, to iest:

$$Wst.2y=2\ wst.y.dost.y \quad - \quad - \quad - \quad (x)$$

$$wst.3y=2\ dost.y.wst.2y-wst.y$$

$$wst.4y=2\ dost.y.wst.3y-wst.2y$$

$$wst.5y=2\ dost.y.wst.4y-wst.3y$$

$$wst.ny=2\ dost.y\ wst.(n-1)y-wst.(n-2)y$$

$$dost.3y=2\ dosty.dost.2y-dost.y$$

$$dost.4y=2\ dost.y.dost.3y-dost.2y$$

$$dost.5y=2\ dost.y.dost.4y-dost.3y$$

i t. d.

$$dost.ny=2\ dosty.\ dost.(n-1)y-dost.(n-2)y.$$

§. LII.

Linie trygonometryczne dodatne i odiemne.

Ponieważ zamierzyliśmy sobie rachunek algebraiczny w trygonometryą wprowadzić, i za pomocą iego tę naukę daley rosciągnąć; potrzeba nam pamiętać na nasze początki w I. Części rzucone, że ilości iakiekolwiek cechowane znakami ogólnemi należy uważać nie tylko przez wzgląd na ich wielkość, ale nawet przez wzgląd na ich stan, w którym się iedne w porównaniu drugich znayduią. Należy nam przeto nauczyć się w liniach trygonometrycznych użycia znaków dodatnych i odiemnych. Czego chcąc doyśdź przez proste geometryczne uwagi, rzućmy okiem na Fig. 1. i ścigaiąc różne odmiany łuku DB, a z nim odmiany wstaw, dostaw, stycznych, dostycznych i t. d. znaydziemy, że kiedy łuk rośnie, iego wstawa i styczna powiększa się; dostawa zaś i dostyczna ubywa; doszedłszy 90°, wstawa staie się nawiększą, czyli równą promieniowi, a dostawa zero; w tym samym przypadku styczna staie się równo-ległą s sieczną, czyli nieskończoney wielkości, a dostyczna zero. Kiedy łuk przeszedłszy 90° znowu rośnie; iego

go wſtawa i ſtyczná ubywa, a doſtawa zaczyná roſnąć. Ale że doſtáwa była dopiero zero, ſtyczná zaś $\frac{1}{0}$, to ieſt przeſzły za granicę oſtatnią wzroſtu i ubywaniá: powiedzieliśmy zaś w §. 16. że ilość iaká ſkończoná przeſzedłſzy za o, albo $\frac{1}{0}$, odmieniá ſwóy ſtán i ſtaie ſię z dodatnéy odiemną lub przeciwnie. więc wſzyſtkié doſtawy i ſtyczne łuków większych od $90°$ czyli kątów rozwartych ſą odiemnémi. Idąc daléy za wzroſtami łuku znáydziém, że kiedy tén będzie $180°$ na tén czás wſtawa $=o$, doſtawa równá promieniowi odiemnému, to ieſt, nazwáwſzy połowę obwodu koła P, wſt. $P=o$, doſt. $P=-1$. Przechodząc za połowę obwodu wſtawy zaczynaią roſnąć i bydź odiemnémi, a doſtawy w tymże ſamym ſtanie ubywaią, i doſzedłſzy $\frac{3}{2}P$ czyli do M, doſtawy ſtaią ſię znowu zero, a wſtawy równé promieniowi odiémnému. Od M naoſtatek idąc do D, doſtawy roſną, ale przeſzedłſzy za zero ſtaią ſię znowu dodatné, a wſtawy odiemné aż do D, póki znowu nie przéydą powtórnie za granice ſwego wzróſtu i ubywaniá. S tych więc uwág wypádá, że wſtawy łuków w piérwſzéy i drugiéy ćwierci koła ſą dodátné, w trzeciéy zaś i czwártéy odiemné; doſtawy w piérwſzéy i czwártéy ćwierci koła ſą dodatné, w drugiéy i trzeciéy odiemné: to ieſt, że śrzednica DL przedzielá wſtawy dodatné, które leżą nad nią; i odiemné które ſię pod nią znayduią: śrzednicá zaś GM oddzielá doſtawy dodatné, które ſą położoné na lewéy, od odiemnych które ſą na prawéy iéy ſtoronie. A ponieważ $ſty.p=\frac{wſt.p}{doſt.p}$; $doſty.p=\frac{1}{ſtyc.p}$, $ſiec.p=\frac{1}{doſt.p}$, $doſie.p=\frac{1}{wſt.p}$; idzie za tém że ſtyczné ſą w tén czás dodatné kiedy wſtawy i doſtawy razém dodatné, albo razém odiemné, co má miéyſce w piérwſzéy i trzeciéy ćwierci koła: ſą zaś odiemné w ćwierci koła drugiéy i czwártéy ponieważ

wáż tam wſtawy i doſtawy maią znaki różné. Doſtyczné iako pokazuie ich zrównanie właśnie ſię tak maią iako i ſtyczne, to ieſt krócéy mówiąc: że ſtyczne i doſtyczne ſą w ćwierciach koła liczby niepárzyſté dodatné; w ćwierciach zaś liczby párzyſtéy odiemné.

Sieczne łuków podług zrównaniá tak ſię maią iako ich doſtawy; doſieczne zaś iako wſtawy, to ieſt: że ſieczne w drugiéy i trzeciéy ćwierci koła ſą odiemné; w piérwſzéy i czwártéy dodatné; doſieczne zaś w piérwſzéy i drugiéy ćwierci dodatné, a w trzeciéy i czwártéy odiemné. S tych uwág wypádaią nám náprzód zrównaniá. $Wst.o=o$, $dost.o=1$; - - $wst.\frac{1}{2}P=1$, $dost.\frac{1}{2}P=o$, $wst.P=o$, $dost.P=-1$, - - - $wst.\frac{3}{2}P=-1$, $dost.\frac{3}{2}P=o$. $wst.\,2P=o$, $dost.\,2P=1$.

Linii każdéy trygonometryczný odpowiadá nieskończoná liczba łuków.

Kombinuiąc zrównaniá teraźniéyſzé z (α), to ieſt, kładąc w té oſtatnié za x łuki $\frac{1}{2}P$, P, $\frac{3}{2}P$, $2P$, i t. d. otrzymámy naſtępuiącé práwdy.

$$Wst.(\tfrac{1}{2}P+y)=+dost.y \;\text{- - -}\; wst.(\tfrac{1}{2}P-y)=+dost.y.$$
$$dost.(\tfrac{1}{2}P+y)=-wst.y \;\text{- - -}\; dost.(\tfrac{1}{2}P-y)=+wst.y.$$
$$wst.(P+y)=-wst.y \;\text{- - -}\; wst.(P-y)=+wst.y$$
$$dost.(P+y)=-dost.y \;\text{- -}\; dost.(P-y)=-dost.y \qquad (\gamma)$$
$$wst.(\tfrac{3}{2}P+y)=-dost.y \;\text{- -}\; wst.(\tfrac{3}{2}P-y)=-dost.y$$
$$dost.(\tfrac{3}{2}P+y)=+wst.y \;\text{- -}\; dost.(\tfrac{3}{2}P-y)=-wst.y$$
$$wst.(2P+y)=+wst.y \;\text{- -}\; wst.(2P-y)=-wst.y$$
$$dost.(2P+y)=+dost.y \;\text{- -}\; dost.(2P-y)=+dost.y$$

powtárzaiąc ieſzcze więcéy razy obwód koła rosciąglibyśmy daléy liczbę tych zrównań, s których każdé ieſt twiérdzeniém geometryczném. Przypatrzywſzy ſię zaś z uwágą wſzyſtkim, widzémy że kilka łuków między ſobą różnych maią té ſamé wſtawy i doſtawy, co nám także figura 4. pokazuie. Wiémy bowiem, że cięciwa w kole należy do tych wſzyſtkich łuków, któré ſię kończą na iey przecięciach s kołém; i tak *AC* należy równie do łuku *ABC*, do łuku *ADC*

Figura 4.

i do

i do wſzyſtkich innych łuków, które obrotém ſwoim opiſze w naſtępuiący ſpoſób: wziąwſzy n. p. koniec cięciwy A, i tocząc ią około drugiégo końca C, ta cięciwa wrociwſzy ſię na ſwé mieyſce, będzie należyć do łuku ABC, i do cáłégo obwodu koła który obiegła, tak dalece, że nazwáwſzy ABC, u; tocząc cięciwę tylé razy, ilé nám ſię podobá i wrácaiąc ią na ſwoié mieyſce, wſzyſtkié łuki, które opiſze ſwym biegiém, będą do niéy należyć, to ieſt łuki u, $u+P'$; $u+2P'$; $u+3P'$; $u+4P'$; i t. d. (tu bierzémy P' za cały obwód koła), toż ſamo mówić o łuku $ADC=P'-u$, s którym podobné dziáć ſię będą odmiany za biegiém cięciwy, tak dalece, że znowu ta ſama cięciwa będzie należyć do łuków $P'-u$, $2P'-u$, $3P'-u$, $4P'-u$, i t. d. Ale że ta cięciwa przechodząc przez łuki u, $P'-u$, ráz niknie, drugi ráz znowu rośnie; idzie za tém że między témi łukami iedné będą, których cięciwa AC ieſt dodatná; a drugié, których ieſt odiemná podług §. 16. to ieſt uważaiąc tén biég iakośmy go uważali w ſtawach i doſtawach, do cięciwy dodátnéy będą należyć łuki

$$u;\ u+2P';\ u+4P' \ - \ - \ u+2nP' \ - \ - \ -$$
$$P'-u;\ 3P'-u,\ 5P'-u \ - \ - \ (2n+1)P'-u.$$

Do cięciwy zaś odiemnéy łuki.

$$u+P';\ u+3P';\ u+5P' \ - \ - \ u+(2n+1)P' \ - \ - \ -$$
$$2P'-u;\ 4P'-u;\ 6P'-u \ - \ - \ 2nP'-u$$

to ieſt że do łuków ABC, ADC, przydaiąc iakąkolwiek liczbę párzyſtą obwodów kołá, wſzyſtkié té łuki będą miały cięciwę AC dodatną: przydaiąc zaś do tychże ſamych łuków liczbę obwodów koła nie párzyſtą; wſzyſtkié będą miały cięciwę AC odiemną. Każdá więc cięciwa náleży do nieſkończonéy liczby łuków, a przeto i wſtawy które ſą połowami cięciw; doſtawy, ſtyczne, doſtyczne, i t. d. które ſą funkcyami piérwſzych, maią także nieſkończoną liczbę łuków, do których náleżą. Ta więc liczba łuków odpowiadaiącá iednéy linii trygonometrycznéy nie może bydź w zrównaniu algebraiczném zawartá;

Ss to ieſt

to ieſt że łuki ſą funkcyami *przeſtępnémi* ſwych wſtáw, doſtáw i t. d. Maiąc więc podané zrównanie n.p. $w\!ſt.z = A$, a chcąc z niégo wyciągnąć łuk z, otrzymámy $z = Ł.Wſt.A$, to ieſt że z ieſt równé łukowi, którégo wſtawa A. Tu náprzód widzémy, iż działanie którégo na rozwiązanie takowégo zrównaniá używámy, ieſt cale różné od tych, któreśmy w I. Części uważali. Oprócz tégo tak rozwiązané zrównanie ieſzcze nás nic oznaczonégo nie uczy: ieżeli bowiem wſtawa A mieć może nieſkończoną liczbę łuków przydaiąc tylé razy obwód koła, ilé nám ſię podobá; z má nieſkończenie wielé wártości, między którémi iedné mogą należyć do naſzégo pytaniá i iego warunków, á drugié nie: ſpoſobu zaś rozróżnieniá takowych wártości naſzému pytaniu właściwych lub obcych, zrównanie nás nie uczy. I na tęć to tak wielką trudność natrafiać zwykliśmy náyczęściéy w rachunkach aſtronomicznych, które poty nie rozwięzuią pytániá, póki przez iaką kombinacyą nie wyrzucémy terminu zamykaiącégo łuki. Spoſóbu tego nie przypádá nám tu ieſzcze tłómaczyć; doſyć nam będzie wſzyſtkié pomocy do tego rachunku wyłożyć i nauczyć ſię w rachunku trygonometrycznym iedné wyrazy zamieniać za drugié.

§. LIII.

Spoſób zamieniania mnogości i potęg w liniach trygonometrycznych.

Piérwſzá trudność którą tu ułatwić powinniśmy, pochodzi z różnych potęg i mnogości linii trygonometrycznych czyniących zrównaniá ciężkiémi do rozwiązaniá, albo przynáymniéy znacznie zawikłanémi. Na tén koniec wróćmy ſię do zrównań (β), s których (2) i (3) zamykaiącé mnogość wſtawy przez doſtáwę, odmieniémy na prościéyſzé, uczyniwſzy w nich $x = ny$, będzie bowiem

$$(1) \quad - \; - \quad 2w\!ſt.ny.\, do\!ſt.y = w\!ſt(n+1)y + w\!ſt.(n-1)y. \quad (d)$$
$$(2) \quad - \; - \quad 2do\!ſt.ny.\, w\!ſt.y = w\!ſt.(n+1)y - w\!ſt.(n-1)y$$

dwa té zrównániá ſłużyć nám zawſze mogą za wzory do wyrażeniá mnogości s wſtáw przez doſtawy łuków kilkokrotnie powtórzonych, przez ſamé wſtawy

wy tychże łuków kilkokrotnych. Czego użycie zaráz nám się pokáże, wziąwszy zrównaniá (2) i (4) z (β) i w tém ostatniém uczyniwszy $x=y$; będzie

$2(wst.y)^2=1-dost.2y$

mnożąc obydwa członki przez $wst.y$, wypadnie $2(wst.y)^3= wst.y- wst.y.\ dost.2y$, które za pomocą zrównaniá (2) z ($\mathfrak{A}$) przerobiémy na $4.(wst.y)^3=3wst.y-wst.3y$. Podobnym sposobém mnożąc ciągle tak przerobione potęgi przez wstawy, i kładąc za mnogości ich wártość w łukach prostych z ($\mathfrak{A}$), przyidziémy do przerobieniá wszystkich potęg wstáw, przez wstawy łuków kilkokrotnych; iak nám następuiące pokazuią zrównaniá:

$$\begin{aligned} &2(wst.y)^2=1-dost.2y\\ &4.(wst.y)^3=3wst.y-wst.3y\\ &8(wst.y)^4=3-4dost.2y+dost.4y \qquad (\varepsilon^1).\\ &16(wst.y)^5=10wst.y-5wst.3y+wst.5y\\ &32(wst.y)^6=10-15dost.2y+6dost.4y-dost.6y\\ &64.(wst.y)^7=35wst.y-21wst.3y+7wst.5y-wst.7y \end{aligned}$$

i t. d.

wziąwszy zaś zrównanie (2) z (β) i z niém podobnie postępuiąc przez użycie zrównaniá (1) z ($\mathfrak{A}$), przyidziémy do wyrażeniá wszystkich potęg dostáw, przez dostawy łuków prostych kilkokrotnie powtórzonych to iest:

$$\begin{aligned} &2(dost.y)^2=1+dost.2y,\\ &4.(dost.y)^3=3dost.y+dost.3y,\\ &8(dost.y)^4=3+4dost.2y+dost.4y, \qquad (\varepsilon^2).\\ &16.(dost.y)^5=10dost.y+5.dost.3y+dost.5y\\ &32(dost.y)^6=10+15dost.2y+6dost.4y+dost.6y\\ &64(dost.y)^7=35dost.y+21dost.3y+7dost.5y+dost.7y. \end{aligned}$$

i t. d.

w tych zamianach współczynniki postępuią tym práwém co i w potędze dwó-wyrazowéy. Wszystkie té zrównaniá będą nám bárzo pożyteczne w wyższych rachunkach.

§. LIV.

Tłómaczy ſię ſpoſób rachowaniá táblic wſtáw, doſtáw i t. d.

Potęgi ieſzcze wſtáw i doſtaw uroionych wyrażaią ſię prościéy, i prowadzą nás do barzo ważnych wypádków. Weźmy zrównanie náypiérwéy wyciągnione $(\text{wſt}.y)^2+(\text{doſt}.y)^2=1$. którego piérwſzy członek rozebráwſzy na mnożników, znáydziémy - - - $(\text{doſt}.y+\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)(\text{doſt}.y-\sqrt{-1}.\text{wst}.y)=1$, a przybráwſzy drugi łuk z wypadnie nám z rachunku

$$(\text{doſt}.y+\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)=\text{doſt}.(z+y)+\sqrt{-1}.\text{wſt}.(z+y)$$

$$(\text{doſt}.y-\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)=\text{doſt}.(z+y)-\sqrt{-1}.\text{wſt}.(z+y)$$

$$(\text{doſt}.x\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.x)(\text{doſt}.z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)(\text{doſt}.y\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)=\text{doſt}.(x+z+y)\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.(x+z+y).$$

uczyniwſzy w piérwſzych $y=z$, w oſtatniém $x=y=z$, otrzymámy:

$$(\text{doſt}.z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^2=\text{doſt}.2z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.2z$$

$$(\text{doſt}.z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^3=\text{doſt}.3z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.3z$$

i ogólnie

$$(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n=\text{doſt}.nz+\sqrt{-1}.\text{wſt}.nz$$

$$(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n=\text{doſt}.nz-\sqrt{-1}.\text{wſt}.nz \quad (\text{A})$$

dodaiąc i odciągaiąc dwa té oſtatnié zrównaniá od ſiebie, wypadnie:

$$2.\text{doſt}.nz=(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n+(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n$$

$$2\sqrt{-1}.\text{wſt}.nz=(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n-(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n$$

té oſtatnié ogólné zrównaniá, równie iak poprzédzaiącé uczą nás, że chcąc kąt lub łuk iaki podzielić na części, i s tego podziáłu iakąkolwiek część wyrazić przez łuk cáłki; wyraź takowy i rozdzielenie kąta zawiſło od zrównaniá ſtopnia, którego wykładnikiém ieſt liczba podziáłu; i tak rościęcie łuku lub kąta na trzy, cztéry, pięć m części, i wyrażenie *3ciéy*, *4téy*, *5téy*, *mtéy* części łuku, przez łuk cáłki, zawiſło od zrównaniá ſtopnia *3go*, *4go*, *5go*, *mgo*. Cośmy iuż także znaleźli wyrážaiąc połowę łuku przez łuk cáłki. S tąd łatwo ieſt zrozumiéć owo wielkié u Starożytności zadanie o potroieniu kątu (*Problema triſectionis anguli*), któré że zależy od zrównaniá *3go*

ſtopnia,

ſtopnia, a co iedno u dawnych Geometrów znaczyło, od wynalezienia dwóch śrzednich proporcyonalnych; nie dziwno, że ie próżno dawni Geometrowie uſiłowali rozwiązać.

W óſtatnich zrównaniach drugie członki rozebráwſzy na ſzereg nieſkończony za pomocą wzoru Newtona, otrzymámy:

$$Doſt.nz = (doſt.z)^n - \frac{n(n-1)}{1.\,2}(doſt.z)^{n-2}(wſt.z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}(doſt.z)^{n-4}(wſt.z)^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}(doſt.z)^{n-6}.(wſt.z)^6 + \text{i t. d.}$$

$$Wſt.nz = n.(doſt.z)^{n-1}\,wſt.z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}(doſt.z)^{n-3}(wſt.z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}(doſt.z)^{n-5}(wſt.z)^5 - \text{i t. d.}$$

s których pierwſze zamyka w drugim członku terminy liczby niepárzyſtey; drugie, terminy liczby párzyſtey potęgi n funkcyi dwó-wyrazowey.

Wziąwſzy teráz za z łuk nieſkończenie mały zrównać go możemy s ſwą wſtawą, będzie więc $wſt.z = z$; $doſt.z = 1$: powtóre, wziąwſzy n za liczbę nieſkończenie wielką, będzie nz liczbą ſkończoną, którą nazwiemy v; a przeto $wſt.z = z = \frac{v}{n}$: te wártości kładąc w zrównania poprzedzaiące, wypadnie:

$$Doſt.v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{v^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ i t. d.} \qquad (\Phi)$$

Wſt.

$$Wſt.\,v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{i t. d.}$$

które nam wyrażaią wſtawy przez łuki w ſzeregach barzo małeiących, i ſłużą do rachowania tablic wſtaw, doſtaw, i t. d. Przypuśćmy n. p. że v ma ſię do ćwierci koła czyli łuku 90°, iako m do n, to ieſt $v = \frac{mP}{2n}$; ponieważ geometrya nas uczy, że pół obwodu koła którego promień $=1$, wyraża ſię w cząſtkach tegoż promienia $3,14159265358 = P$; będzie

$$Wſt.\,Ł.\,\frac{m}{n}90^o = \frac{m}{n}.\ 1,57079632679$$
$$- \frac{m^3}{n^3}.\ 0,64596409750$$
$$+ \frac{m^5}{n^5}.\ 0,07969262624$$
$$- \frac{m^7}{n^7}.\ 0,00468175413$$
$$+ \frac{m^9}{n^9}.\ 0,00016044118$$
i t. d.

$$Doſt.\,Ł.\,\frac{m}{n}90^o = 1,00000000000$$
$$- \frac{m^2}{n^2}.\ 1,23370055013$$
$$+ \frac{m^4}{n^4}.\ 0,25366950790$$
$$- \frac{m^6}{n^6}.\ 0,02086348076$$
$$+ \frac{m^8}{n^8}.\ 0,00091926027$$
i t. d.

łatwość

łatwość tego rachunku zależy od ułomku $\frac{m}{n}$, który nie może bydź większy od $\frac{1}{2}$ dlá tego, że w rachowaniu wstáw i dostáw nie idziémy tylko do $45°$. Dáymy że $\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$, włożywszy tę wártość ułomku w wyrazy poprzédzaiącé znáydziémy wstáwę łuku $18°$ $=0,30901699437$ iego zaś dostawę $=0,95105651629$. wyiąwszy ostatnié figury liczb któré będą dlá tego różné, żeśmy do piąci tylko terminów szereg ciągnęli. Poniéwáż zaś zrównaniá (ϕ) wypadły s tego przypuszczeniá że v ieſt łukiem barzo małym mogącym się zmięszać s swą wstáwą; nie możémy brać za v łuku większégo od $30°$. Iakże rachować wstáwy i dostawy łuków większych? na to podaią nám sposób zrównaniá z (β), (1) i (4), uczyniwszy w nich $x=30°$, poniéwáż $wst.30°=\frac{1}{2}$, będzie

$$Wst.y=dost.(30°-y)-dost.(30°+y)$$
$$Dost.y=wst.(30°+y)+wst.(30°-y)$$

więc

$$Wst.(30°+y)=dost.y-wst.(30°-y)$$
$$Dost.(30°+y)=dost.(30°-y)-wst.y.$$

za pomocą tych zrównań możná iakichkolwiek łuków rachować wstawy i dostawy.

Od wstáw i dostáw łatwo przychodźémy do stycznych i dostycznych przez zrównaniá wyrażaiącé związek między piérwszémi i ostatniémi. Wiémy bowiem że $sty.p=\frac{wst.p}{dost.p}$ a przeto z zrównań (α) otrzymámy: Rachunek stycznych i dostycznych.

$$Sty.(x+y)=\frac{wst.x.dost.y+dost.x.wst.y}{dost.x.dost.y-wst.x.wst.y.}$$
$$Sty.(x-y)=\frac{wst.x.dost.y-dost.x.wst.y.}{dost.x\ dost.y+wst.x.wst.y.}$$

rozdzieliwszy w obydwóch tych zrównaniach tak licznika iak i mianownika przez $dost.x.\ dost.y$; wypadnie:

$$Sty.(x+y) = \frac{sty.x + sty.y}{1 - sty.x.\ sty.y}$$
$$Sty.(x-y) = \frac{sty.x - st.y}{1 + sty.x.sty.y} \qquad (\psi).$$

w pierwszém uczyniwszy $x=y$, znaydziémy:

$$Sty.2y = \frac{2\,sty.y}{1-(sty.y)^2} \quad \text{--} \quad dosty.2y = \frac{dosty.y - sty.y}{2}$$

podobnym sposobém działaiąc w zrównaniach (β), to ieſt uczyniwszy naſámprzód $x+y=a$, $x-y=b$, przeto $y=\frac{a-b}{2}$, $x=\frac{a+b}{2}$; wypadną nám náprzód zrównaniá:

$$Wst.a + wst.b = 2\,wst.\frac{a+b}{2}.\ dost.\frac{a-b}{2}$$
$$Dost.a + dost.b = 2\,dost.\frac{a+b}{2}\ dost.\frac{a-b}{2}$$
$$Wst.a - wst.b = 2\,dost.\frac{a+b}{2}\ wst.\frac{a-b}{2}$$
$$Dost.b - dost.a = 2\,wst.\frac{a+b}{2}\ wst.\frac{a-b}{2}$$

które dzieląc przez ſię otrzymámy:

$$\frac{Wst.a + wst.b}{Dost.a + dost.b} = sty.\frac{a+b}{2}$$
$$\frac{Wst.a - wst.b}{Dost.b - dost.a} = dosty.\frac{a+b}{2}$$
$$\frac{Wsta.a - wst.b}{Dost.a + dost.b} = sty.\frac{a-b}{2} \qquad (\upsilon)$$
$$\frac{Wst.a + wst.b}{Dost.b - dost.a} = dosty.\frac{a-b}{2}$$

§. LV.

§. LV.

Wróćmy się teraz do zrównań (λ) zawieraiących wyrazy uroione, a utrzymawszy te same przypuszczenia któreśmy tam uczynili na z, n, biorąc łuk z za nieskończenie mały, a liczbę n za nieskończenie wielką; wypadnie nam $zn = v$, $z = \frac{v}{n}$, $wst. z = z = \frac{v}{n}$ $dost. z = 1$. a przeto, Zamiana funkcyi uroionych za rzetelne, i wyraz logarytmów przez łuki koła.

$$Dost. v = \frac{\left(1 + \frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n + \left(1 - \frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n}{2}$$

$$Wst. v = \frac{\left(1 + \frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n - \left(1 - \frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Dowiedliśmy zaś w nauce o logarytmach hyperbolicznych pod §. 49. że biorąc e za ich grunt, - - $(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$, czyli kładąc $v\sqrt{-1}$, $-v\sqrt{-1}$ za z; $(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{n})^n = e^{v\sqrt{-1}}$, a przeto

$$Dost. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}; Wst. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

s kąd $e^{v\sqrt{-1}} = Dost. v + \sqrt{-1}. Wst. v$; $e^{-v\sqrt{-1}} = Dost. v - \sqrt{-1}. Wst. v$, te zrównania pokazuią nam barzo biiącą, o umysł prawdę; że funkcye wykładnicze uroione maią swóy wyraz rzetelny przez wstawy i dostawy łuków. Uczyńmy znowu teraz n liczbą nieskończenie małą, a g liczbą nieskończenie wielką czyli $n = \frac{1}{g}$; będzie $dost. nz = dost. \frac{z}{g} = 1$; $Wst. nz = wst. \frac{z}{g} = \frac{z}{g}$, a zrównania ($\lambda$) staną się

$$1=\frac{(Dost.z+\sqrt{-1}.wst.z)^{\frac{1}{g}}+(dost.z-\sqrt{-1}.wst.z)^{\frac{1}{g}}}{2}$$

$$\frac{z}{g}=\frac{(Dost.z+\sqrt{-1}.wst.z)^{\frac{1}{g}}-(dost.z-\sqrt{-1}.wst.z)^{\frac{1}{g}}}{2\sqrt{-1}}.$$

przypomniymy ſobie o logarytmach przyrodzonych w §. 49. że $log.(1+z)=g(1+z)^{\frac{1}{g}}-g$: a uczyniwſzy $1+z=y$; $y^{\frac{1}{g}}=1+\frac{1}{g}log.y$: te wyrazy wprowadzone w poprzedzaiące zrównania zamienią ie na:

$$1=\frac{1+\frac{1}{g}log.(dost.z+\sqrt{-1}\,wst.z)+1+\frac{1}{g}log.(dost.z-\sqrt{-1}.wst.z)}{2.}$$

$$\frac{z}{g}=\frac{\frac{1}{g}log.(dost.z+\sqrt{-1}\,wst.z)-\frac{1}{g}log.(dost.z-\sqrt{-1}.\,wst.z)}{2\sqrt{-1}.} \qquad (\varphi)$$

zrównanie drugie wyraża ſie ieſzcze tak:

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,log.\,\frac{Dost.z+\sqrt{-1}.wst.z}{dost.z-\sqrt{-1}.wst.z}$$

rozdzieliwſzy w niem tak licznika iak mianownika przez $dost.z$, otrzymamy:

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,log.\,\frac{1+\sqrt{-1}.sty.z}{1-\sqrt{-1}.sty.z} \qquad (\omega).$$

niech będzie z łukiem, ktorego *Styczna* $=o$, będzie: $2\sqrt{-1}.z=log.1$. logarytm więc iedności tyle będzie miał wartości, ile ieſt łuków maiących ſtyczną zero; takich zaś łuków ieſt nieſkończona liczba podług §. 525 bo ieżeli P znaczy połowę obudwu koła, łuki

$o, P,$

o, P, 2P, 3P, 4P, nP, wszystkie maią styczną zero; a przeto logarytm iedności rówuy w tém przypuszczeniu, $o, 2P\sqrt{-1}, 4P\sqrt{-1}, 6P\sqrt{-1}, 2nP\sqrt{-1}$. Iedność więc ma nieskończoną liczbę logarytmów, s których wszystkie uroione, prócz o; aże każdá liczba B, uważać się może iako 1. B. a iey logarytm $= log. 1 + log. B$, idzie za tém że każdá liczba ma nieskończenie wiele logarytmów, s których ieden iest tylko rzetelny, a wszystkie inne uroione; co nam daie widzieć w logarytmach drugą właśność funkcyi przestępnych.

Zapatrzywszy się ieszcze na zrównanie (ω) i przywiodłszy sobie na pamięć naukę o logarytmach pod §. 49. przekonamy się, że ieżeli tam $log. \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} +$ i t. d. położywszy $x = \sqrt{-1}. sty. z$; zrównanie (ω) rozbierze się na szereg

$$z = sty. z - \frac{(sty. z)^3}{3} + \frac{(sty. z)^5}{5} - \frac{(sty. z)^7}{7} + \text{ i t. d.}$$

położmy $sty. z = t$, będzie

$$z = Ł. sty. t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{ i t. d.}$$

niech będzie z łukiém 45°, czyli $z = \frac{1}{4}P$, ponieważ wiémy z geometryi że $sty. \frac{1}{4}P = 1$; będzie $t = 1$, a przeto $\frac{1}{4}P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ i t. d.

Tén szereg iest sławnym owym wzorém *Leibnitza*, który on wynalazł na kwadrowanie koła. Z wyżéy podanych o szeregach wiadomości rosądzémy, że tén wzór na nic nam nie może służyć. Potrzebaby bowiem dla użycia go, aby przynáymniéy było $t = \frac{1}{10}$, ale ponieważ nie można naznaczyć stósunku między łukiém którégo styczná $\frac{1}{10}$, i między obwodém

cáłym, to przypuſzczenie niczego nás nie może nauczyć o wymiarze koła. Náleży do tego koniecznie obrać łuk taki, któryby był cząſtką wielokrotną obwodu; do czego náywygodnieyſzy w teraźnieyſzym razie łuk 30°, którego ſtyczná $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ponieważ ſtyczne innych łuków ſą barziey niewymierne. W tém przypuſzczeniu znáydziém:

$$z = \frac{1}{6}P = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3.\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2.\sqrt{3}} - \text{i t. d. czyli}$$

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2.\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \text{i t. d.}$$

s tego oſtatniego ſzeregu z niewypowiedzianą prácą wyciągniono wártość połowy obwodu koła w ułomku dzieſiątkowym do 130 przeſzło figur, którey liczby początkowe ſą $P = 3,14159265358979+$

J.P. *Euler* ſzczęśliwiey użył wzoru *Liebnitza*: wziąwſzy łuk 45° za z, rozdzielił go na dwá, $a+b=45^\circ$, s kąd $ſty.(a+b)=1=\frac{ſty.a+ſty.b}{1-ſt.a.ſty.b}$, a przeto

$$ſty.b. = \frac{1-ſty.a}{1+ſty.a}.$$

połóżmy teráz $ſty.a=\frac{1}{2}$; więc $ſty.b=\frac{1}{3}$, a ſzereg Leibnitza rozebrány na dwie części da wártość $\frac{1}{4}P$ znacznie ſię zbliżaiącą do wártości práwdziwey

$$P = 4.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{i t. d.} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{11}{11.3^{11}} + \text{i t. d.} \end{array}\right.$$

te wſzyſtkie ſzeregi wypádaiące z wzóru Leibnitza, odmieniaiąc znaki, przerobić ſię mogą ná ułomki ciągłe podług tego, cośmy wykonali w §. 46. na zrównaniu (e''): i tak ſam wzór Leibnitza zamieniá ſię na ten ułomek ciągły:

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}p = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{ i t. d.}}}}}}$$

Poznaliśmy w teraźnieyszym §, że pierwiastki uroione maią swoie wyrazy rzetelne przez inny rodzay funkcyi: i tak wyraz uroiony w logarytmach można za pomocą podanych zrównań przemienić na wyraz rzetelny w łukach koła; tak dalece, że przechodząc od logarytmów do łuków, i przeciwnie, natrafiamy zawsze na wyrazy uroione. Ieżeli więc w zrównaniu przestępnem pokażą się pierwiastki uroione, te nie wytykaią niepodobieństwa zadania we wszystkich sposobach, ale tylko nas uczą, że rozwiązanie pytania stało się niepodobnem w logarytmach, ale że iest podobnem przez łuki koła; lub przeciwnie, że iest niepodobne w łukach koła, ale podobne w logarytmach. Mamy więc w funkcyach przestępnych sposób przeyścia od pierwiastków uroionych do rzetelnych; co funkcyom algebraicznym nie służy, podobno dla tego, że tam działania są te same na iakikolwiek funkcyi algebraicznych gatunek; tu zaś każdy gatunek funkcyi przestępnych ma sobie właściwe działanie w rozwiązanie zrównań wchodzące: a zatem ieżeli n.p. pytanie iakie zawisło od łuków koła, sposób obeyścia się z niem przez logarytmy cale mu nie służy, i czyni ie niepodobnem.

§. LVI.

Przystosowanie poprzedzaiącey nauki do wynaydowania mnożników podwóynych funkcyi.

Dotąd odbyliśmy sobie to, co należy do rachunku linii trygonometrycznych zamieniaiąc ie iedne za drugie. Zostaie nam się zatrzymać nad użyciem tego rachunku w tem, czegośmy przez funkcye algebraiczne nie mogli dokazać. Pamiętamy że w nauce o szeregach na końcu §. 43 rozbieraiąc ułomki składane, na

ne, na ułomki proste wzoru $\frac{A}{1-pz}$ dostrzegliśmy, że ile razy mianownik składa się z mnożników uroionych, ułomek składany nie może się rozebrać na ułomki mianowników 1go stopnia, boby te całą funkcyą zrobiły uroioną; ale koniecznie w tym przypadku ułomki należy rozbierać na inne, których mianowniki są 2go stopnia. $a-bz+c^2zz$ rzetelne, powstaiące z dwóch uroionych. Ta uwaga dała nam uczuć potrzebę cechy rozróżniaiącey funkcyą 2go stopnia złożoną z mnożników uroionych, od tey, która się rodzi z mnożników rzetelnych. Zatrzymaymy się teraz nad tem: funkcya iakakolwiek 2go stopnia wyrazić się może nayogólniey przez $a-bz+czz$: rozebrawszy ią na mnożników, wypadnie:

$z = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{c}\left[\frac{b^2}{4ca}-1\right]\right)}$: żeby z było uroionem, i żeby funkcya podana miała dwóch uroionych mnożników, potrzeba podług §. 15. żeby $\frac{b^2}{4ca} < 1$, czyli żeby $\frac{b}{2\sqrt{ca}} < 1$; wyraziwszy więc $\frac{b}{2\sqrt{ca}}$ przez ilość iaką mnieyszą od iedności, wyrażemy razem mnożnika uroionego funkcyi podaney.

Z wiadomości iuż wyłożonych w tym rozdziale wiemy, że wstawy i dostawy iakichkolwiek łuków prócz $90°$ są mnieyszemi od iedności, więc przybrawszy łuk p, i za $\frac{b}{2\sqrt{ca}}$ położywszy dostawę tego łuku, to iest $\frac{b}{2\sqrt{ca}} = Dost.p.$ czyli $b = 2\sqrt{ca}.\ Dost.\ p$; funkcya podana zamykaiąca w sobie takową wartość na b, będzie koniecznie wyrażać mnożników uroionych, s których się składa; to iest: $a-2z\sqrt{ca}.\ Dost.p. + czz$, będzie wyrazem powszechnym, wszystkich funkcyi dwó-ksztaltnych zamykaiących mnożniki uro

ione

ione. Zebyśmy ten wyraz uczynili wygodnieyszym, oswobodźmy go ze znaku pierwiastkowego, położywszy a^2 za a, c^2 za c, a tak - - $a^2 - 2acz\, Dost.p + c^2z^2$ - - (A') będzie wzorem powszechnym funkcyi złożoney z dwóch mnożników uroionych.

Chcąc teraz odkryć sposób ogólny rozbierania iakieykolwiek funkcyi na mnożników wzóru (A'), potrzeba nám náprzód wystawić iakiegokolwiek stopnia funkcyą złożoną s takowych mnożników, s którą rόwnaiąc wszystkie inne, moglibyśmy się nauczyć, czyli ta zamyka mnożników uroionych lub nie? a doszedłszy że ich zamyka, żebyśmy mogli wyciągnąć s tego porównywania łuk p, i inne nieoznaczone ilości. Do rozwiązania tey trudności dosyć nám będzie użyć tey samey sztuki, która nám szczęśliwie posłużyła w §. 31. Rozebráwszy nasámprzód (A') na swych mnożników, i te potem na zrównanie zamieniwszy, znaydziemy:

$$cz - a(Dost.p + \sqrt{-1}.Wst.p);\; cz - a(Dost.p - \sqrt{-1}.Wst.p)$$
$$z = a'(Dost.p + \sqrt{-1}.Wst.p);\; z = a'(Dost.p - \sqrt{-1}.Wst.p) \quad (A'')$$

gdzie $a' = \frac{a}{c}$. Teraz niech

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ i t. d.} \qquad (B')$$

oznacza funkcyą iakąkolwiek, którą chcemy przerobić na funkcyą zamykaiącą mnożniki (A'); kładę za z, z^2, z^3, i t. d. wártości z zrównáń (A''); za pomocą wzóru ogólnego $(Dost.p \pm \sqrt{-1}.Wst.p)^n = Dost.np \pm \sqrt{-1}.Wst.np$; otrzymámy dwa następuiące zrównania:

$$o = \begin{cases} A + Ba'Dost.p + Ca'^2Dost.2p + Da'^3Dost.3p + \text{ i t. d.} \\ + Ba'\sqrt{-1}.Wst.p + Ca'^2\sqrt{-1}.Wst.2p + Da'^3\sqrt{-1}. \\ Wst.3p + \text{ i t. d.} \end{cases}$$

$$o = \begin{cases} A + Ba'Dost.p + Ca'^2Dost.2p + Da'^3Dost.3p + \text{ i t. d.} \\ - Ba'\sqrt{-1}.Wst.p - Ca'^2\sqrt{-1}.Wst.2p - Da'^3\sqrt{-1}. \\ Wst.3p + \text{ i t. d.} \end{cases}$$

które dodane i odciągnione od siebie rodzą dwa inne;

$o = A + Ba'Dost.p + Ca'^{2}Dost.2p + Da'^{3}Dost.3p +$ i t. d.
$o = \quad Ba'Wst.p + Ca'^{2}Wst.2p + Da'^{3}Wst.3p +$ i t. d. $(B''1)$

mnożąc pierwſzé z nich przez *Wst.mp*, drugié przez *Dost.mp*, i té potém mnogości dodané i odciągnioné zamiéniwſzy na wſtawy łuków kilkokretnych za pomocą (𝔄), otrzymamy dwa náyogólniéyſzé zrównaniá.

$o = A.Wst.mp + Ba'Wst.(m+1)p + Ca'^{2}Wst.(m+2)p$
$+$ i t. d. $(B''2)$
$o = A.Wst.mp + Ba'Wst.(m-1)p + Ca'^{2}Wst.(m-2)p$
$+$ i t. d.

chcąc podobné zrównaniá otrzymać przez funkcyą doſtáw, mnożę pierwſzé z zrównáń $(B''1)$ przez *Dost.mp*, drugié przez *Wst.mp*, a za pomocą (β) wypadną zrównaniá:

$o = A.Dost.mp + Ba'Dost.(m-1)p + Ca'^{3}Dost.(m-2)p$
$+$ i t. d. $(B''3)$
$o = A.Dost.mp + Ba'Dost.(m+1)p + Ca'^{2}Dost.(m+2)p$
$+$ i t. d.

$(B''2)$ i $(B''3)$ ſą zrównaniá náyogólniéyſzé zamykaiącé mnożników (A'), s którémi równaiąc iakąkolwiek funkcyą podaną; wyciągniémy wártość kąta p i a'; a przeto mnożników wzóru (A'); tylé nám bowiem wypádnie wártości na p, ile funkcya podaná takowych mnożników zawiérá. Zrównaniá $(B''2)$, i $(B''3)$ wyrażoné przez wſtawy i doſtawy poddaiąc więcéy kombinacyi pomogą nám do tém łatwiéyſzégo oznaczeniá a' i kąta p. Piérwſzé z $(B''2)$, drugié z $(B''3)$ ſłużą na funkcyą POWSTAIĄCĄ (*aſcendens*), w któréy potęgi ilości nieznanéy roſną; zrównanie zaś drugié z $(B''2)$ i piérwſzé z $(B''3)$ na funkcyą SPADAIĄCĄ (*deſcendens*), w któréy ſię potęgi ilości nieznanéy poſtępuiąc, zniżaią.

Zobaczmy té wſzyſtkié prawidła w przykładzie: Niech będzie $a^{n}+z^{n}$ funkcyą podáną, któréy chcémy wynaleśdź mnożników podwóynych (A') pamiętaiąc że $a' = \frac{a}{c}$, ponieważ ta funkcyá zamyká piérwſzy

termin

termin a^n bez ilości nieznaney, równać ią należy z (B''1); s czego wypadną dwa zrównania:

$a^n+a'^n$ Dost.$np=o$ - - - a'^n Wst.$np=o$.

aże a nie może bydź zero, drugie s tych zrównań daie Wst.$np=o$, trzeba więc za p brać wszystkie łuki, których wstawa zero, maiąc wzgląd na dodatne i odiemne: łuki zaś te są $(2k+1)P$; albo $2kP$; k będąc liczbą iakąkolwiek całką, P zaś półobwodem koła; pierwszym odpowiada dostawa -1, drugim $+1$. Ponieważ zaś funkcya a^n+z^n iest cała dodatna; trzeba wziąść dostawę odiemną, aby się stała a^n-z^n, przez co nie wprowadzi wyrazów uroionych zamieniaiąc się na zrównanie. Wziąwszy przeto,

$np=(2k+1)P$, czyli $p=\frac{(2k+1)P}{n}$; otrzymamy

$a^n=a'^n=\frac{a^n}{c^n}$, to iest $a'=a$, $c=1$, i mnożnik podwóyny funkcyi podaney będzie - - - -

a^2-2az Dost.$\frac{(2k+1)}{n}P+z^2$; gdzie za $2k+1$ brać należy wszystkie liczby nieparzyste nie przewyższaiące n; wszystkie bowiem większe od n wracaią tych samych mnożników. Niech będzie $n=5$; biorąc za $2k+1$, 1; 3; 5; otrzymamy:

a^2-2az Dost.$\frac{1}{5}P+zz$ - - a^2-2azDost.$\frac{3}{5}P+zz$; - - $a^2+2az+zz$.

ostatni mnożnik iest zupełną potęgą drugą, ponieważ dostawa $P=-1$; może on wchodzić cały za mnożnika funkcyi a^5+z^5? Na ułatwienie tego zagadnienia wróćmy się do zrównań (B''1): wypadło nam ich dwa dla tego, że tu idzie o mnożników podwóynych; ale ieżeli w którym s takowych mnożników dostawa $=\pm1$; musi koniecznie wstawa bydź zero; a zatem iedno z zrównań (B''1) niknie, i uczy nas, że w przypadku kiedy albo wstawa albo dostawa $=\pm1$, na ten czás ieden tylko mnożnik wchodzi w skład funkcyi podaney. Więc ilekolwiek razy otrzymamy za mnożnika podwóynego zupełną potę-

 gę drugą,

gę drugą, náleży tylko iéy pierwiáſtek brać za mnożnika funkcyi podanéy. I tak w teraźnieyſzym przykładzie mnożniki funkcyi a^5+z^5, ſą

$$a^2-2az\,Doſt.\tfrac{1}{5}P+z^2 \quad a^2-2az\,Doſt.\tfrac{3}{5}P+z^2 \quad a+z.$$

Iakóż przypatrzywſzy ſię funkcyi $a^n \pm z^n$, doſtrzeżémy łatwo, że kiedy n ieſt liczbą párzyſtą, a^n+z^n nie má żádnego mnożnika rzetelnégo, ale a^n-z^n má ich koniecznie dwa $a-z$, i $a+z$: kiedy zaś n ieſt liczbą niepárzyſtą a^n+z^n má zawſze przynáymniéy iednégo mnożnika rzetelnégo $a+z$; podobnie a^n-z^n iednégo rzetelnégo $a-z$.

Niech będzie funkcyá podaná $a^{2n}-2a^nz^n\,Doſt.g+z^{2n}$, mámy z niéy za pomocą (B″1) dwa zrównaniá

$$a^{2n}-2a^na'^n Doſt.g.Doſt.np+a'^{2n}Doſt.2np=0 \quad (1)$$
$$-2a^na'^n Doſt.g.Wſt.np+a'^{2n}Wſt.2np=0 \quad (2)$$

rozmnożywſzy pierwſzé przez $wſt.\,2np$, drugié przez $doſt.\,2np$, i odciągnąwſzy ie od ſiebie, otrzymámy takié zrównanie iakié nám wyráżá (B″2), to ieſt:

$$a^{2n}\,wſt.2np-2a^na'^n\,doſt.g(wſt.2np\;doſt.np-wſt.np\;doſt.2np)=0.$$

czyli $a^{2n}wſt.2np-2a^na'^n\,doſt.g\;wſt.np=0$

znoſząc ie z (2), wypádá $a=\frac{a}{c}$, $c=1$. $wſt.2np=2\,doſt.g\;wſt.np$; ażé $wſt.2np=2\,doſt.np.\,wſt.np$, więc $doſt.g=doſt.np$: a ponieważ znowu $doſt.(2kP\pm g)=doſt.g$, będzie $p=\frac{2kP\pm g}{n}$. Przeto biorąc za $2k$ wſzyſtkié liczby párzyſté nie przewyżſzaiącé n, otrzymámy mnożników ſzukanych. Niech będzie $n=3$, funkcyá $a^6-2a^3z^3\,doſt.g+z^6$, má za mnożników

$$a^2-2az\,doſt.\frac{1}{3}g+z^2, \quad a^2-2az\,doſt.\frac{2P-g}{3}+z^2$$
$$a^2-2az\,doſt.\frac{2P+g}{3}+z^2.$$

§. LVII.

§. LVII.

Sposób dopiéro wyłożony rozbiéraniá funkcyi na swych mnożników dwoistych, rosciągá się nawet do szeregów nieskończonych. W §. 49. znaleźlismy że Szeregi nieskończone ro zbiéraią się na mnożników.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{i t.d.} = (1 + \frac{x}{g})^g:$$

szereg tén będąc równy potędze wykładnika nieskończonégo g, má nieskończoną liczbę mnożników równych. Iakże ich znáydziémy? zrównáymy náprzód szereg nieskończony s swoią potęgą, tę zaś s funkcyą $a^n - z^n$; będzie

$$(1 + \frac{x}{g})^g - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{i t. d.}$$

przeto $1 + \frac{x}{g} = a$, $z = 1$, $n = g$, a mnożnik podwóyny (A') stanie się:

$$(1 + \frac{x}{g})^2 - 2(1 + \frac{x}{g})\,dost.\,\frac{2kP}{g} + 1,$$

biorąc teráz za $2k$ wszystkié liczby párzysté $0, 2, 4, 6.$ i t. d. wypádną nám mnożniki szeregu podanégo: położmy $2k = 0$, otrzymámy za mnożnika $1go$, $\frac{x^2}{g^2}$ s którégo podług wyłożonéy przyczyny w §. poprzédzaiącym nie náleży bráć tylko $\frac{x}{g}$; ale że $\frac{x}{g}$ má bydź mnożoné przez nieskończoną liczbę mnożników podwóynych; więc x iest w saméy rzeczy piérwszym mnożnikiém naszégo szeregu, co oczywiście się pokazuie. Chcąc teráz innych mnożników oznaczyć, weźmy z § 54. (ϕ), za $dost.\,\frac{2kP}{g}$ iego wártość w piérwszych terminach szeregowych, uważaiąc inné terminy rozdzielné przez potęgi g iako niknącé, to iest $dost.\,\frac{2kP}{g} = 1 - \frac{2k^2P^2}{g^2}$, a mnożnik nasz zamieni się

na $(1+\frac{x}{g})^2-2(1+\frac{x}{g})(1-\frac{2k^2P^2}{g^2})+1=\frac{x^2}{g^2}+\frac{4k^2P^2}{g^2}$ $+\frac{4k^2P^2x}{g^3}$; rozdzieliwszy wszystkie terminy drugiego członka przez $\frac{4k^2P^2}{g^2}$ otrzymamy za mnożnika $1+\frac{x}{g}$ $+\frac{x^2}{4k^2P^2}$. w którym biorąc za k^2 wszystkie liczby parzyste, wypadnie nam nieskończona liczba mnożników szeregu podanego, to iest:

$$x(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{4P^2})(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{16P^2})(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{36P^2})(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{64P^2}) \text{ i t. d.} = e^x-1.$$

tymże samym sposobem znaydziemy, że

$$e^{-x}-1=(1-\frac{x}{g})^g-1=-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$-$ i t. d. $=x(1-\frac{x}{g}+\frac{x^2}{4P^2})(1-\frac{x}{g}+\frac{x^2}{16P^2})(1-\frac{x}{g}+\frac{x^2}{36P^2})$ i t. d.

Doświadczmy ieszcze tego sposobu w funkcyach uroionych: wiemy że $wst.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$;

$$e^{x\sqrt{-1}}=(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g,\ e^{-x\sqrt{-1}}=(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g$$

będzie więc $wst.x=\frac{(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g-(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g}{2\sqrt{-1}}$;

równaiąc ten wyraz s funkcyą a^n-z^n; wypadnie

$a=\frac{1+\frac{x\sqrt{-1}}{g}}{2\sqrt{-1}}$; $z=\frac{1-\frac{x\sqrt{-1}}{g}}{2\sqrt{-1}}$; mnożnik zaś podwóyny

dwóyny będzie:

$$\frac{(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})^2}{-2}-\frac{2(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})}{-2}\ \text{dost.}\ \frac{2kP}{g}$$
$$+\frac{(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})^2}{-2}$$

wykonáwszy to mnożenie, i włożywszy za $Dost.\ \frac{2kP}{g}$ $=1-\frac{2k^2P^2}{g^2}$; wypadnie mnożnik $(1-\frac{x^2}{k^2P^2})$; w którym biorąc za k wszystkie liczby w porządku naturalnym, otrzymamy:

$$Wst.x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{i t. d}$$
$$=x(1-\frac{x^2}{P^2})(1-\frac{x^2}{4P^2})(1-\frac{x^2}{9P^2})(1-\frac{x^2}{16P^2})(1-\frac{x^2}{25P^2})$$
$$(1-\frac{x^2}{36P^2})\ \text{i t.d.}=x(1+\frac{x}{P})(1-\frac{x}{P})(1-\frac{x}{2P})(1+\frac{x}{2P})$$
$$(1-\frac{x}{3P})(1+\frac{x}{3P})(1-\frac{x}{4P})(1+\frac{x}{4P})\ \text{i t. d.}$$ Wziąwszy

znowu $Dost.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\frac{(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g}{2}+$
$\frac{(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g}{2}$, porównáwszy tén wyráz s funkcyą a^n+z^n, wynáydziémy:

$$Dost.x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{i t. d.}=(1-\frac{4x^2}{P^2})$$
$$(1-\frac{4x^2}{9P^2})(1-\frac{4x^2}{25P^2})(1-\frac{4x^2}{49P^2})\ \text{i t. d.}$$

=

$$=(1-\frac{2x}{P})(1+\frac{2x}{P})(1-\frac{2x}{3P})(1+\frac{2x}{3P})(1-\frac{2x}{5P})$$
$(1+\frac{2x}{5P})$ i t. d.

Ieżeli którykolwiek s tych mnożników wchodzących w wyráz wſtawy ſtanie ſię zero; cały ſzereg zniknie, i $Wſt.x=0$, co ſię trafi wziąwſzy zą x, $0, P, 2P, 3P;$ kP; k znacząc iakąkolwiek liczbę. Toż ſamo znáydziémy w doſtawie, że ta zniknie, ieżeli $x=\frac{(2k+1)P}{2}$, co oczywiście z natury koła wypádá.

Uczyńmy teráz $x=\frac{m}{n}P$; $\frac{m}{n}$ wyráżá ſtóſunek iakiégokolwiek łuku do półobwodu; będzie

$$Wſt.\frac{mP}{n}=\frac{mP}{n}(1-\frac{m^2}{n^2})(1-\frac{m^2}{4n^2})(1-\frac{m^2}{9n^2})(1-\frac{m^2}{16n^2})$$
i t. d.

$$Doſt.\frac{mP}{n}=(1-\frac{4m^2}{n^2})(1-\frac{4m^2}{9n^2})(1-\frac{4m^2}{25n^2})(1-\frac{4m^2}{49n^2})$$
i t. d.

a położywſzy $2n$ za n, i rozebráwſzy każdégo z mnożników na dwa proſté zrównaniá, té zamienią ſię na

$$Wſt.\frac{mP}{2n}=\frac{mP}{2n}(\frac{2n-m}{2n})(\frac{2n+m}{2n})(\frac{4n-m}{4n})(\frac{4n+m}{4n})$$
$$(\frac{6n-m}{6n})(\frac{6n+m}{6n}) \text{ i t. d. } - - - - - (L)$$

$$Doſt.\frac{mP}{2n}=(\frac{n-m}{n})(\frac{n+m}{n})(\frac{3n-m}{3n})(\frac{3n+m}{3n})(\frac{5n-m}{5n})$$
$$(\frac{5n+m}{5n})(\frac{7n-m}{7n})(\frac{7n+m}{7n}) \text{ i t. d. } - - - - (M)$$

przypuśćmy teráz, że $\frac{mP}{2n}=90°$, czyli $m=n=1$, będzie $Wſt.\frac{mP}{2n}=1$, zrównanie (M) zniknie; (L) zaś dá

1=

$\frac{P}{2}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{8}.\frac{9}{10}.\frac{11}{10}.\frac{11}{12}.$ i.t.d. czyli

$\frac{1}{2}P=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.14.14.\text{ i t. d.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13.13.15.\text{ i t. d.}}$

i ten ci to iest sławny wzór *Wallisa*, podany od niego na kwadrowanie koła w arytmetyce ilości nieskończonych. Biorąc po dwa na raz mnożniki wzór ten może się ieszcze tak wystawić:

$\frac{1}{2}P=2.\frac{8}{9}.\frac{24}{25}.\frac{48}{49}.\frac{80}{81}.\frac{120}{121}.\frac{168}{169}$ i t. d.

że $\frac{8}{9}=1-\frac{1}{9}$; $\frac{24}{25}=1-\frac{1}{25}$; $\frac{48}{49}=1-\frac{1}{49}$ i t. d. więc

$\frac{1}{2}P=2(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{25})(1-\frac{1}{49})(1-\frac{1}{81})$ i t. d.

Wiémy z nauki o logarytmach hyperbolicznych; że

$l.(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-$ i t. d. - (Q) więc

$log.(1-\frac{1}{9})=-\frac{1}{9}-\frac{1}{2.9^2}-\frac{1}{3.9^3}-\frac{1}{4.9^4}-$ i t. d.

co równie do wszystkich mnożników stósuiąc, znáydziém:

$log.hyp.P=log.4+log.(1-\frac{1}{9})+log.(1-\frac{1}{25})+$

$log.(1-\frac{1}{49})+$ i t. d.

rozbieraiąc zaś $log.(1-\frac{1}{9})$, $log.(1-\frac{1}{25})$ i t. d. podług wzoru (Q) wypadną ich wártości w następuiących szeregach.

$log.(1-\frac{1}{9})\Big\{-\frac{1}{9}-\frac{1}{2.9^2}-\frac{1}{3.9^3}-\frac{1}{4.9^4}-\frac{1}{5.9^5}-$ i t. d.

$log.(1-\frac{1}{25})\Big\{-\frac{1}{25}-\frac{1}{2.(25)^2}-\frac{1}{3(25)^3}-\frac{1}{4(25)^4}-\frac{1}{5(25)^5}-$ i t. d.

log.

$$log.(1-\frac{1}{49})\left\{-\frac{1}{49}-\frac{1}{2(49)^2}-\frac{1}{3(49)^3}-\frac{1}{4(49)^4}\right.$$

$$-\frac{1}{5(49)^5}-\text{i t. d.}$$

a zebráwſzy ſzeregi s terminów ſobie podłożonych, nazwiymy:

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{i t. d.}$$

$$B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{i t. d.}$$

$$C=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{i t. d.}$$

$$D=1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{i t. d.}$$

znaydziémy:

$log.hy.P=log.4.-(A-1))-\frac{1}{2}(B-1)-\frac{1}{3}(C-1)-$
$\frac{1}{4}(D-1)-$ i t. d.

co zamiéniwſzy na ułomki dzieſiątkowé, wypadnie nám bez wielkiéy prácy.

$log.hyp.P=1,1447298858494$ i t. d. rozmnożywſzy zaś tę liczbę przez 0,43429 i t. d. podług §. 50. wypadnie w układzie Briggiuſza.

$log.P=0,4971498726941338$ i t. d.

Maiąc logarytm półobwodu koła, łatwo nám ieſt rachować logarytmy wſtáw i doſtáw za pomocą zrównań (L), (M). widziémy bowiem że

$$Log.Wſt.\frac{mP}{2n}=log.P+log.\frac{m}{2n}+log.(1-\frac{m^2}{4n^2})+log.$$

$$(1-\frac{m^2}{16n^2})+\text{i t. d.}$$

$$Log.Doſt.\frac{mP}{2n}=log.(1-\frac{mm}{n^2})+log.(1-\frac{mm}{9n^2}+$$

$$log.(1-\frac{mm}{25n^2})+\text{i t. d.}$$

dwa

dwa té zrównaniá uczą nás sposobu rachowaniá tablic logarytmów na linie trygonometryczné, iakich codziénnię w matematyce praktycznéy używać zwykliśmy.

S tych wszystkich wyłożonych práwd oczywiście się pokázało, że rozbieranie szeregów nieskończonych przez które się funkcye przestępné wyrażaią, na swé mnożniki, iest wielkiégo barzo użyciá w rachowaniu tablic logarytmów. Z nich wyciągnęliśmy wzory i liczby, na które natrafiámy we wszystkich praktycznéy mátématyki częściach, abyśmy czytelnikowi wytknęli sposób, iakiégo dziś możná użyć do wynaydowaniá ich. Niechcémy się dłużéy nad tą materyą rościągać, bo każdy z wyłożonych od nas początków reszty sobie doyśdź może bez náymniéyszéy trudności. Ułatwiymy tylko króciuteńko to, co nám z wyższych pozostało uwág.

§. LVIII.

Zostawiliśmy w §. 35. nierozwiązané zadanie o rozbiorze funkcyi ułomkowych zamykaiących mnożniki uroioné w mianowniku, na ułomki prosté; dlá tego, żeśmy nie umieli iefzcze mnożników podwóynych rzetelnych, które z dwóch uroionych powstaią w wyrazie przyzwoitym wystąwić. Doszedłszy teráz, że takowé mnożniki wyrazić się ogólnie mogą przez $a^2—2acz\,Dost.p+c^2z^2$ (*Aa*) należy nám się do tamtego zadaniá wrocić, i tu ié dopełnić. Wystáwmy sobie więc ułomek náyogólniéyszy.

Funkcyé ułomkowé rozbiéraią się na mnożniki dwókształtné rzetelne, z dwóch uroionych złożoné.

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d.}}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3+e'z^4+\text{ i t. d.}}=\frac{M}{N},$$

przypuśćmy, że mianownik N zamyká w sobie mnożniki uroioné prosté, a zatém mnożnika podwoynégo $a^2—2acz\,dost.p+c^2z^2$, i oprócz tego mnożników innych rzetelnych, które wyrażémy przez $S=a''+b''z+c''z^2+d''z^3+e''z^4+$ i t. d. pamiętaiąc na początki wyłożoné w §. 35. przekonámy się, że ułomek $\frac{M}{N}$, ro-

zbiera się na te proste $\frac{M}{N}=\frac{A'+B'z}{a^2-2acz\,dost.p+c^2z^2}$

$+\frac{R}{S}=\frac{M}{(a^2-2acz\,dost.p+c^2z^2)S}$, á przeto

$R=\frac{M-(A'+B'z)S}{a^2-2acz\,dost.p+c^2z^2}$; R będąc ilością całką, musi koniecznie $M-(A'+B'z)S$ bydź rózdzielne przez $a^2-2acz\,dost.p+c^2z^2$, a zatém uczyniwszy tę ostatnią funkcyą zero, i z niéy wydobytą wártość ná z,

$z=\frac{a}{c}(dost.p\pm\sqrt{-1}.wst.p)$, włożywszy w $M-(A'+B'z)S$, będzie $M-(A'+B'z)S=0$, s kąd wypáda $M=A'S+B'Sz$ - - (Ab). należy nám więc náprzód przerobić M, N, na funkcyą inną zamykaiącą nową wártość na z wziętą z (Aa), z nich potém otrzymáwszy dwa zrównaniá na z, potrafiémy oznaczyć A', B'. Zatrudniymy się teráz tém przerabianiém pamiętaiąc na to, że $z^n=\frac{a^n}{c^n}(dost.np\pm\sqrt{-1}.wst.np)$, biorąc dla krotszego rachunku $\frac{a}{c}=m$, otrzymámy naprzód dwa następuiące zrównaniá na liczniká M.

$A+Bm.dost.p+Cm^2\,dost.2p+Dm^3\,dost.3p+$ i t.d. $=M'$
$\pm(Bm.\,wst.p+Cm^2\,wst.2p+Dm^3\,wst.3p+$ i t.d.$)\sqrt{-1}$
$=\pm M''\sqrt{-1}$.

na $A'S$

$A'(a''+b''m\,dost.p+c''m^2\,dost.2p+d''m^3\,dost.3p+$ i t. d.$)$
$=A'N'$
$\pm A'(b''m\,wst.p+c''m^2wst.2p+d''m^3wst.3p+$ i t.d.$)\sqrt{-1}$
$=\pm A'N''\sqrt{-1}$.

na $B'Sz$

$B'(a''m\,dost.p+b''m^2\,dost.2p+c''m^3\,dost.3p+$ i t. d.$)$
$=B'P'$
$\pm B'(a''m\,wst.p+b''m^2\,wst.2p+c''m^3\,wst.3p+$ i t. d.$)$
$\sqrt{-1}=\pm B'P''\sqrt{-1}$. w téy

w tey odmianie zrównanie (Ab), rozdzieli się na dwa takie

$$M' + M''\sqrt{-1} = A'N' + A'N''\sqrt{-1} + B'P' + B'P''\sqrt{-1}$$

$$M' - M''\sqrt{-1} = A'N' - A'N''\sqrt{-1} + B'P' - B'P''\sqrt{-1}.$$

które dodaiąc i znowu odciągaiąc od siebie, znäyдziemy:

$$M' = A'N' + B'P'$$

$$M'' = A'N'' + B'P'' \text{ przeto}$$

$$A' = \frac{M'P'' - M''P'}{N'P'' - P'N''} \; \text{--} \; B' = \frac{M''N' - M'N''}{N'P'' - N''P'}$$

mämy przez ostatnie dwa zrównaniá A', B'; a przeto licznika ułomku $\frac{A'+B'z}{a^2 - 2acz\,dost.p + c^2z^2}$, pamiętäymy tylko że M' otrzymuiemy kładąc w M za z^n, $m^n\,dost.np$; kładąc zaś w M za z^n, $m^n\,wst.np$; otrzymuiemy M'': podobnie kładąc w S, $m^n\,dost.np$ za z^n, otrzymuiemy N'; N'' zaś, kiedy $m^n\,wst.np$ kładziemy za z^n w S: naostatek otrzymuiemy P' kładąc w Sz, $m^n\,dost.np$ za z^n; P'' zaś, kładąc $m^n\,wst.np$ za z^n w Sz: tym sposobem wynalázłszy $M', M'', N', N'', P', P''$, wypädaią wärtości na A', B', i zadanie się rozwięzuie.

Przykłád: Niech będzie ułomek - - -

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)} = \frac{M}{N}$$ który należy rozebrać na dwa ułomki wzoru $\frac{A'+B'z}{a^2-2acz\,dost.p+c^2z^2}$ biorąc $1-\frac{8}{5}z+z^2$ za mianownika ułomku szukanego, mämy $M = 1+2z+z^2$, $S = 1+2z+3z^2$, $Sz = z+2z^2+3z^3$, $a^2 - 2acz.dost.p + c^2z^2 = 1 - \frac{8}{5}z + z^2$; a przeto $a=1, c=1$, $m=1$, $2\,dost.p = \frac{8}{5}$; $dost.\,p = \frac{4}{5}$. Poniewáž nie mämy stósunku łuku dostawy $\frac{4}{5}$ do obwodu koła, muszemy szukać wstäw łuków powtärzanych za pomocą zrównäń $(\varkappa)$ w §. 51; dostäw zaś za pomocą zrównaniá $Dost.p = \sqrt{[1-(wst.p)^2]}$, będzie więc

 $Wst.p =$

$Wſt.p=\frac{3}{5}$ - - - $Doſt.p=\frac{4}{5}$

$Wſt.2p=\frac{24}{25}$ - - - $Doſt.2p=\frac{7}{25}$

$Wſt.3p=\frac{117}{125}$ - - - $Doſt.3p=-\frac{44}{125}$

kładąc zaś za z^n, $doſt.np.$ w M, S, Sz
otrzymamy - - - M', N', P',
kładąc za z^n, $wſt.np$ w M, S, Sz
otrzymamy - - - M'', N'', P''.

$M'=1+\frac{2.4}{5}+\frac{7}{25}=\frac{72}{25}$ - - $M''=0+2.\frac{3}{5}+\frac{24}{25}=\frac{54}{25}$

$N'=1+\frac{8}{5}+\frac{21}{25}=\frac{86}{25}$ - - $N''=0+2.\frac{3}{5}+3.\frac{24}{25}=\frac{102}{25}$

$P'=\frac{4}{5}+\frac{2.7}{25}-\frac{3.44}{125}=\frac{38}{125}$ - - $P''=\frac{3}{5}+\frac{2.24}{25}+\frac{3.117}{125}=\frac{666}{125}$

s kąd wyciągniemy $N'P''-P'N''=\frac{2136}{125}$, a przeto

$A'=\frac{1836}{2136}=\frac{12.153}{12.178}=\frac{153}{178}$

$B'=-\frac{540}{2136}=-\frac{12.45}{12.178}=-\frac{45}{178}$; a przeto

ułomek pierwszy na który ſię rozbiera $\frac{M}{N}$, ieſt - - -

$$\frac{(153-45z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}$$

na wynalezienie drugiego ułomku, będzie $M=1+2z+z^2$, $S=1-\frac{8}{5}z+z^2$, - - $a^2-2acz\,doſt.p+c^2z^2=1+2z+3z^2$, s kąd wypada $a=1$, $c=-\sqrt{3}$, $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $doſt.p=\frac{1}{\sqrt{3}}$.. podobnem iak przedtem działaniem znaydziemy:

$Wſt.p=$

$$Wst.p=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \text{- - - -}\ Dost.p=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Wst.2p=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \text{- - -}\ Dost.2p=-\frac{1}{3}$$

$$Wst.3p=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\ \text{- - -}\ Dost.3p=-\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

kładąc za z^n, $(-1:\sqrt{3})^n Dost.np$ w M, S, Sz
otrzymámy - - - - - M', N', P'.
kładąc zaś $z^n=(-1:\sqrt{3})^n Wst.np$ - - w M, S, Sz.
otrzymámy - - - - - M'', N'', P''.

$$M'=1-\frac{2}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

$$M''=0-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}}{3.3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$N'=1+\frac{8}{5.\sqrt{3}.\sqrt{3}}-\frac{1}{9}=\frac{64}{45}$$

$$N''=0+\frac{8.\sqrt{2}}{5.\sqrt{3}.\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}}{3.3}=\frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$P'=-\frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}+\frac{8}{5.3.3}+\frac{5}{9.\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{4}{135}$$

$$P''=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}-\frac{8.2\sqrt{2}}{5.3.3}-\frac{\sqrt{2}}{3.3.3}=-\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

s kąd wypadnie $N'P''-P'N''=-\frac{712\sqrt{2}}{675}$, a przeto

$A'=\frac{25}{178}$; $B'=\frac{135}{178}$, i ułomek drugi $=\frac{(25+135z):178}{1+2z+3z^2}$;

przeto $\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)}=\frac{(153-45z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}$
$+\frac{(25+135z):178}{1+2z+3z^2}$

w tym rachunku P', P'' wypádaią s teyże famey funkcyi S rozmnożoney przez z, s którey N', N''; mo-

żémy więc przez kombinacyą barzo proſtą P', P'' wyrazić przez N', N'': iakóż przekonámy ſię że

$P'=m(N'Doſt.p-N''Wſt.p)$.

$P''=m(N'Wſt.p+N''Doſt.p)$ przeto

$N'P''-N''P'=(N'N'+N''N'')mWſt.p$

$M'P''-M''P'=(M'N'+M''N'')mWſt.p.+(M'N''-M''N')$. $mDoſt.p$

Przeto $$A'=\frac{M'N'+M''N''}{N'N'+N''N''}+\frac{(M'N''-M''N')Doſt.p}{N'N'+N''N''.Wſt.p}$$

$$B'=\frac{M''N'-M'N''}{N'N'+N''N''m.Wſt.p} \quad (Y)$$

§. LIX.

Rozwięzuie ſię to ſamo za danie, kiedy mianownik zawiérá mnożni ków podwóy nych równych.

Uwáżaliśmy w teraźniéyſzym rozbiorze ułomku $\frac{M}{N}$, że N nie zawiérá w ſobie mnożników równych $a^2-2acz\,Doſt.p.+c^2z^2$: przypuściwſzy zaś że N zamyka różné iakiékolwiek potęgi takowych podwóynych mnożników n.p. $(a^2-2acz\,Doſt.p+c^2z^2)^g$, na tén czás S zawiérá także w ſobie $a^2-2acz\,Doſt.p+c^2z^2$, i położywſzy w zrównaniu $M=A'S+B'Sz$ - - (Ab), $z^n=m^n(Doſt.np\pm\sqrt{-1}.Wſt.np.)$ będzie $S=o$, a zatém $M=o$, co nie tylko nám nie dá żádnéy wártości na A', B'; ale ieſzcze wprowadzi warunek cale przeciwny zadaniu uczyniwſzy $M=o$. S téy uwági łatwo ſię przekonać, że kiedy funkcya $\frac{M}{N}$ zawiérá w ſobie mnożników podwóynych równych, ſpoſób rozbiérániá iey muſi bydź różny od tego, ktorégośmy dopiéro użyli. Ta różnica iuż nám ſię pokázała wyżéy pod §. 35. i oráz powinna nás wielé oświécić w teraźniéyſzym rachunku.

Niech będzie $N=(a^2-2acz\,Doſt.p+c^2z^2)^g S$, gdzie S zamyká mnożniki różné od tego, który ieſt w potędze g: §§. 34, 35, iuż nás przekonały, że funkcyá takowá rozbiérá ſię koniecznie na inné takich wzorów,

rów, iakie nám następuiące wyráżá zrównanie:

$$\frac{M}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^g S}=\frac{A'+B'z}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^g}$$
$$+\frac{C'+D'z}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^{g-1}}+\frac{E'+F'z}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^{g-2}}$$

$+$ i t.d. $+\frac{R}{S}$, z niego wypádá:

$$R=\frac{M-S[A'+B'z+(C'+D'z)(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)+\text{ i t.d.}]}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^g}, (A\alpha)$$

położywszy teráz $a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2=o$, wszystkie następuiące terminy odpadną, zostawiwszy $M-SA'-SB'z=o$, włożywszy więc w M, S, Sz, za z^n, m^n. $Dost.np$, $m^n\,Wst.np$. otrzymámy A', B' tak, iak w poprzédzaiącém działaniu: miawszy iuż A', B', oznaczoné, $M-SA'-SB'z$, iest koniecznie rozdzielné przez $a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2$, wykonáwszy to dzielenie, otrzymámy wieloráz P', to iest:

$$P'=\frac{M-SA'-SB'z}{a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2}$$, a zrównanie $(A\alpha)$ zniży się o ieden stopień, i dá nám następuiącą wártość:

$$R=\frac{P'-S[C'+D'z+(E'+F'z)(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)+\text{ i t.d.}]}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^{g-1}}$$

gdzie znówu mianownik stawszy się zero, zostawi $P'-SC'-SD'z=o$. Kładąc w P', S, Sz, $m^n\,Dost.np$, $m^n\,Wst.np$ za z^n; oznaczémy C', D'; te oznaczoné wártości na C', D', uczynią $P'-SC'-SD'z$ zupełnie rozdzielném przez $a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2$: wykonáwszy to dzielenie i nazwáwszy iego wieloráz Q', będzie

$$Q'=\frac{P'-SC'-SD'z}{a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2}$$: włożywszy znowu Q' w zrównanie ostatnié na R, zniżémy ié ieszcze o ieden stopień:

$$R=\frac{Q'-S[E'+F'z+(G'+H'z)(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)+\text{ i t.d.}]}{(a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2)^{g-2}}$$

 podobném

podobném rozumowaniém i działaniém wynaydziémy znowu E', F', w czém nám wiele pomoże dokładne zrozumienie §. 35.

Używaiąc zrównań (Y) na A', B', wiedzieć nám należy, że te fame służą nám na C', D'; E', F'; G', H'; i t. d. wfzyftkich liczników ułomków proftych, na które fię $\frac{M}{N}$ rozbierá, pamiętaiąc na to, że w nich N', N'', iako wypádaiące z S zoftáną nienarufzoné; ale M', M'', odmieniaią fię z odmianą M, tak dalece, że iako wypádaią w piérwfzym ułomku kładąc $m^n Doft.np$, $m^n Wft.np$, za z^n w M; tak w drugim na C', D', wypadną kładąc w P'; w trzecim na E', F', kładąc w Q', te fame wártości za z, i t. d.

Przykład. Niech będzie funkcyá podaná - -

$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}$, gdzie $M=z-z^3$, $S=1+z^4$, a^2-2acz, $Doft.p+c^2z^2=1+z^2$, a przeto $a=1$, $m=1$, $Doft.p=0$ więc $p=\frac{1}{2}P$; tu P znaczy półobwodu koła, będzie więc

$$Wft.p=1 \;\text{- - -}\; Doft.p=0$$
$$Wft.2p=0 \;\text{- - -}\; Doft.2p=-1$$
$$Wft.3p=-1 \;\text{- - -}\; Doft.3p=0$$
$$Wft.4p=0 \;\text{- - -}\; Doft.4p=1.$$

ułomek zaś $\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}$ rozbierá fię na $\frac{A'+B'z}{(1+z^2)^4}$ $+\frac{C'+D'z}{(1+z^2)^3}+\frac{E'+F'z}{(1+z^2)^2}+\frac{G'+H'z}{1+z^2}+$ i t. d.

kładąc wfpomnioné wártości na z, w M, S, Sz, wypadnie nám $M'=0$, $M''=2$, $N'=2$, $N''=0$, przeto z (Y) $A'=0$, $B'=1$.

$P'=\frac{-z^3-z^5}{1+z^2}=-z^3$, kładąc w P', $Doft.np$, $Wft.np$, za z^n; otrzymámy $M'=0$, $M''=1$, zaczém idzie $C'=0$, $D'=\frac{1}{2}$, $C'+D'z=\frac{1}{2}z$;

$Q'=$

$Q' = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1+z^2} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3$; kładąc w Q' za z, z^3 wspomnione wártości, wypadnie $M'=o$, $M''=o$, a zatém $E'=o$, $F'=o$.

$$R' = \frac{Q' - SE' - SF'z}{1+z^2} = \frac{Q'}{1+z^2} = \frac{-z-z^3}{2(1+z^2)} = -\frac{1}{2}z,$$

włożywszy za z wártość wspomnioną w R', znáydziemy $M'=o$, $M''=-\frac{1}{2}$, a przeto $G'=o$, $H'=-\frac{1}{4}$. Zaczém

$$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)} = \frac{1}{(1+z^2)^4} + \frac{1}{2(1+z^2)^3} - \frac{1}{4(1+z^2)} + \text{i t. d.}$$

§. LX.

Rozbiéranie funkcyi ułomkowéy składanéy, na ułomki proste było nam potrzebné w §. 36, do wynáydowaniá wyrazów ogólnych na szeregi zwrotné, które się s funkcyi ułomkowych rodzą. Sposób w §. 36. na odkrycie wyrazów ogólnych podany, nie rościąga się do ułomków maiących w mianowniku mnożniki uroioné, bo dopiéro za pomocą wstáw i dostáw potrafiliśmy ogólnie wyrazić funkcyą dwó-ksztáłtną rzetelną, złożoną z dwóch uroionych, nauczywszy się zaráz rozbiérać iakąkolwiek bądź funkcyą całką lub łamaną na takowé mnożniki. S tych wiadomości łatwo nam iest barzo to dopełnić, cośmy w §. 36 o wyrazach ogólnych opuścili. Przypomniymy sobie náprzód wzóry wyrazów ogólnych któréśmy w §. 33 podali na szeregi rodzącé się z ułomków $\frac{A}{1-pz}$, $\frac{A}{(1-pz)^m}$: potrzebá nam teráz podobné wynaleśdź na funkcye pozostałe

Przystósowanie poprzedzaiącéy nauki do szeregów.

$$(1)\ \frac{A+Brz}{1-2rz\,Dost.p+r^2z^2} \cdot \cdot \ (2)\ \frac{A+Brz}{(1-2rz\,Dost.p+r^2z^2)^s}$$

Gdybyśmy piérwszą n.p. funkcyą rozebrali na szereg sposobém Des-Carta w §. 32 użytym, i w tym szere-

gu upatrowali prawa, podług którégo układaią się terminy; ciężkoby nám było dostrzédz zaráz wyrazu ogólnégo dlá przyczyn wyłożonych w §. 33. Chwyćmy się więc drogi iednostaynie nám w całéy téy nauce służącéy, to iest: obiérzmy sobie inné funkcye ułomkowé z mianownikiém $1-2rz\,Dost.p+r^2z^2$, któréby nám w swym szeregu łatwo odkryły wyráz ogólny; s témi dopiéro równaiąc funkcyą (1), przyidziémy do wynalezieniá iéy wyrazu ogólnégo.

Niech będzie $\frac{Lrz.Wst.p}{1-2rz\,Dost.p+r^2z^2}$ funkcyą wspomnioną, rozbiéraiąc ią na szereg podług §. 32.

$$\frac{Lrz.Wst.p}{1-2rz\,Dost.p+r^2z^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d.}$$

oznaczémy $A, B, C, D,$ i t. d. i otrzymámy szereg:
$Lrz\,Wst.p+Lr^2z^2\,Wst.2p+Lr^3z^3\,Wst.3p+Lr^4z^4\,Wst.4p+$ i t. d. - - - (a)
którégo wyráz ogólny oczywiście się pokazuie - - $Lr^nz^n\,Wst.np.$ - - (a')

Niech będzie powtóré funkcyá inná $\frac{Q-Qrz\,Dost.p}{1-2rz\,Dost.p+r^2z^2}$, którą przez tén sám sposób rozebráwszy na szereg, otrzymámy:

$Q+Qrz\,Dost.p+Qr^2z^2\,Dost.2p+Qr^3z^3\,Dost.3p+$ i t. d. (b)
którégo wyráz ogólny iest - - $Qr^nz^n\,Dost.np$ - - (b')
złączmy teráz funkcyą piérwszą z drugą, otrzymámy:

$$\frac{Q+Lrz\,Wst.p-Qrz\,Dost.p}{1-2rz\,Dost.p+r^2z^2}\quad - - - - (c)$$

wyráz ogólny téy ostatniéy funkcyi, iest równy summie wyrazów ogólnych (a'), (b'), to iest:

$$(L\,Wst.np.+Q\,Dost.np)r^nz^n\quad - - - - (c')$$

a ponieważ funkcyá (c) iest wzóru podobnégo do $\frac{A+Brz}{1-2rz\,Dost.p+r^2z^2}$ (1), równaiąc ich liczników między sobą wypadnie wártość na L, Q, wyrażoná przez A, B, a przeto i wyráz ogólny. Otrzymámy bowiem

bowiem s porównaniá terminów $A=Q$, $B=L\,Wſt.p$ $-Q\,Doſt.p$, czyli $L=\frac{B+A\,Doſt.p}{Wſt.p}$; włożywſzy té wártości za L, Q, w (c'), znáydziémy: $\frac{(B\,Wſt.np+A\,Wſt.np\,Doſt.p+A\,Wſt.p\,Doſt.np)r^nz^n}{Wſt.p}$. Aże $Wſt.np\,Doſt.p+Wſt.p\,Doſt.np=Wſt.(n+1)p$: więc $\frac{B\,Wſt.np+A\,Wſt.(n+1)p}{Wſt.p}\,r^nz^n$ ieſt wyrazem ogólnym ſzeregu wypadáiącégo s funkcyi ułomkowéy - - $\frac{A+Brz}{1-2rz\,Doſt.p+r^2z^2}$.

Zoſtaie nám teráz wynaleśdź wyráz ogólny ſzeregu powſtaiącego s funkcyi któréy mianownikiém ieſt $(1-2rz\,Doſt.p+r^2z^2)^g$. Tén żebyśmy mogli z §. 33. wyciągnąć, przypomniymy ſobie że funkcyi $\frac{A}{(1-qz)^g}$ wyráz ogólny ieſt:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\;-\;-\;-\;(n+g-1)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5\;-\;-\;-\;(g-1)}\,Aq^nz^n$$

potrzebaby nám więc funkcyą naſzę przywieśdź do wzoru $\frac{A}{(1-qz)^g}$. na tén koniec rozbiérzmy - - - $(1-2rz\,Doſt.p+r^2z^2)^g$, na dwa mnożniki proſté, chociáż uroioné: $(1-(Doſt.p+\sqrt{-1}.Wſt.p)rz)^g$, $(1-(Doſt.p$ $-\sqrt{-1}\,Wſt.p)rz)^g$ przez co funkcyá złożoná rozbierze ſię na té dwa ułomki:

$$\frac{K}{(1-(Doſt.p+\sqrt{-1}.Wſt.p)rz)^g}+\frac{L}{(1-(Doſt.p-\sqrt{-1}.Wſt.p)rz)^g},$$

których mianowniki równaiąc z $\frac{A}{(1-qz)^g}$ wypadnie $q=r\,Doſt.p+r\sqrt{-1}.Wſt.p$ w piérwſzym; $q=r\,Doſt.p$ $-r\sqrt{-1}.Wſt.p$, w drugim ułomku: a przeto $q^n=r^n$ $(Doſt.np+\sqrt{-1}.Wſt.np)$, $q^n=r^n(Doſt.np-\sqrt{-1}.Wſt.np)$;

wyraz więc ogólny obydwóch tych ułomków będzie:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+g-1)}{1.\,2.\,3.\,4\cdots(g-1)}(Dost.np+\sqrt{-1}.Wst.np)Kr^nz^n+$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+g-1)}{1.\,2.\,3.\,4\cdots(g-1)}(Dost.np-\sqrt{-1}.Wst.np)Lr^nz^n$$

uczyniwszy potém $K+L=f$, $K-L=\frac{h}{\sqrt{-1}}$, będzie

$$K=\frac{f\sqrt{-1}+h}{2\sqrt{-1}};\ L=\frac{f\sqrt{-1}-h}{2\sqrt{-1}},$$ a przeto

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+g-1)}{1.\,2.\,3.\,4\cdots(g-1)}(fDost.np+h\,Wst.np)r^nz^n\ \cdots\ (s)$$

iest wyrazem ogólnym szeregu powstaiącégo z dwóch ułomków:

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{h}{2\sqrt{-1}}}{(1-(Dost.p+\sqrt{-1}.Wst.p)rz)^g}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{h}{2\sqrt{-1}}}{(1-(Dost.p-\sqrt{-1}.Wst.p)rz)^g},$$

czyli ułomku iednégo:

$$\frac{\begin{array}{l} f-gfrz\,Dost.p+\frac{g(g-1)}{1.\,2}fr^2z^2\,Dost.2p+\text{i t.d.}\\ +ghrz\,Wst.p-\frac{g(g-1)}{1.\,2}hr^2z^2\,Wst.2p+\text{i t.d.}\end{array}}{(1-2rz\,Dost.p+r^2z^2)^g}.$$

Ten ułomek wystawiá nám nayogólnieyszy wzór wszystkich ułomków maiących w mianowniku iakąkolwiek potęgę mnożnika podwoynégo $1-2rzDost.p+r^2z^2$, których wyrazy ogólne są zamknięte w (s). Mámy więc iuż sposób znaydowaniá wyrazów ogólnych w szeregach powstaiących z iakieykolwiek funkcyi wymiernych; w obydwóch zaś tego Tomu częściach to wszystko, czegokolwiek nás dziś Algebra może o zrównaniach i funkcyach nauczyć.

KONIEC PIERWSZEGO TOMU.

W Y P I S

MATERYI W PIERWSZYM TOMIE ZAWARTYCH.

CZĘSC PIERWSZA

O FUNKCYACH I ZROWNANIACH ALGEBRAICZNYCH.

ROZDZIAŁ I. O prawidłach s pierwszych myśleniá początków wydobytych, które w działaniu iakichkolwiek, i w sposobach rozwiązaniá Zrównan Pierwszego Stopnia zachodzą.

§. 4.

§. 16.

§. 24.

CZĘSC

CZĘSC DRUGA

TŁOMACZĄCA NATURĘ I WŁASNOSCI FUNKCYI PRZESTĘPNYCH, ORAZ SPOSOB ONYCH WYRAŻANIA.

ROZDZIAŁ I. O rozbieraniu funkcyi na fzeregi: o fzeregach zwrotnych, i fpofobie wynaydowania ogólnégo ich wyrazu.

W. *prawdy*

ROZDZIAŁ II. O zbieraniu ſzeregów zwrótnych i ułomkach ciągłych.

ROZDZIAŁ III. O pierwſzym rodzaiu funkcyi przeſtępnych, czyli *logarytmach,* i ſpoſobie rachowania tablic logarytmów.

Rozwiązuią

Sposób



Tablica do karty 22.

Przykład I. Mnożenia.

$$a^2 + 2ax - 3xb^2$$
$$a^2 - 2ax + 3xb^2$$
$$a^4 + 2a^3x - 3a^2b^2x$$
$$- 2a^3x - 4a^2x^2 + 6ab^2x^2$$
$$+ 3a^2b^2x + 6ab^2x^2 - 9b^4x^2$$
$$a^4 + 0 - 4a^2x^2 + 12ab^2x^2 - 9b^4x^2$$

Przykład II.

$$a^2 + x^2$$
$$a^2 - x^2$$
$$a^4 + a^2x^2$$
$$- a^2x^2 - x^4$$
$$a^4 - x^4$$

Przykład I. Dzielenia.

Funkcya Dzieląca. | Podzielna. | Wieloraz

$$a^3 + 3abc - b^2c \;\big|\; 2a^5 + a^3bc - 2a^2b^2c - 15ab^2c^2 + 5b^3c^2 \;\big|\; 2a^2 - 5bc$$
$$- 2a^5 - 6a^3bc + 2a^2b^2c$$
$$- 5a^3bc - 15ab^2c^2 + 5b^3c^2$$
$$+ 5a^3bc + 15ab^2c^2 - 5b^3c^2$$
$$0$$

Przykład II. (B).

$$a^2 + ab \;\big|\; a^3 + 2a^2b - ab^2$$
$$- a^3 - a^2b$$
$$a^2b - ab^2$$
$$- a^2b - ab^2$$
$$- 2ab^2$$
$$+ 2ab^2 + 2b^3$$
$$2b^3$$
$$- 2b^3 - \frac{2b^4}{a}$$
$$- \frac{2b^4}{a}$$
$$+ \frac{2b^4}{a} + \frac{2b^5}{a^2} \text{ i t. d.}$$

Wieloraz.

$$a + b - \frac{2b^2}{a} + \frac{2b^3}{a^2} - \frac{2b^4}{a^3} + \frac{2b^5}{a^4} - \text{ i t. d.}$$

Táblica do karty 62.

Przykład wyciągania pierwiáſtków z liczb za pomocą wzórow Algebraicznych.

(B) - - - - 34,965,783 - - - $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$. (A) Pierwiáſtek.

x^3 27 - - - - - - - $x=3$

7965 - - - - $=3x^2a+3xa^2+a^3$

Dzielnik $3x^2$ 2700 - - - - - : - - $a=2$

$3x^2a=$ 5400

$3xa^2=$ 36

$a^3=$ 8

Zbiór - - - - - 5768

Reſztá - - - - - 2197783 $=3x^2a+3xa^2+a^3$ - - - $x=32$

Dzielnik $3x^2=$ 3072 - - - - - - $a=7$

$3x^2a=$ 21504

$3xa^2=$ 4704

$a^3=$ 343

Zbiór - - - - - 2197783

Reſzta - - - - - 000 - - Pierwiáſtek cały - - $=327$


Biblioteka Jagiellońska
stdr0009662

